



André David Maia Santos

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

Otimização das propriedades elásticas de materiais compósitos de microestrutura periódica

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho,
Prof. Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologias
da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof^a Doutora Marta Isabel Pimenta
Verdete da Silva Carvalho

Arguentes: Prof. Doutor João Mário Burguete
Botelho Cardoso

Vogais: Prof. Doutor Pedro Samuel Gonçalves
Coelho



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro, 2016

Copyright

Otimização das propriedades elásticas de materiais compósitos de microestrutura periódica.

Copyright ©André David Maia Santos Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos

educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Pedro Coelho, por toda a disponibilidade e empenho demonstrados ao longo de toda a dissertação, bem como todos os conhecimentos transmitidos, que tornaram possível a realização de todo este trabalho.

Ao departamento de Engenharia Mecânica e Industrial (DEMI) por disponibilizar todas as condições e equipamentos imprescindíveis para a realização desta dissertação.

Aos meus pais, que desde sempre, me permitiram obter a melhor educação e formação possível, disponibilizando incondicionalmente apoio tanto a nível emocional como financeiro. Para os restantes familiares deixo a minha palavra de agradecimento.

Aos meus amigos, especialmente àqueles com quem travei um maior contacto durante todo o período académico, que, no meio de brincadeiras e piadas, sempre criaram um ambiente de ajuda e apoio mútuo, essencial à realização de todo o curso.

A todos aqueles que me acompanharam nesta jornada, um muito obrigado.

Resumo

A presente dissertação aborda o tema da otimização das propriedades elásticas de materiais compósitos de microestrutura periódica, sendo também estudados certos fatores de influência na otimização topológica, e realizado um estudo dos efeitos de escala do coeficiente de Poisson.

Neste trabalho foi dado apenas atenção ao plano yz da microestrutura, pelo que a célula base só possui dimensão nas direções y e z , sendo o *design* constante ao longo da direção x . O material trabalhado é um compósito constituído por duas fases, sólido e vazio (material poroso).

Os fatores de influência foram analisados através do problema da minimização da densidade de energia com constrangimentos de volume. Estes fatores são: a discretização da malha de elementos finitos; o estado de carga macroscópica a que a microestrutura é sujeita; a estratégia de filtro de sensibilidades e o *design* inicial.

No estudo da otimização das propriedades elásticas, foram obtidas topologias quando otimizadas diversas componentes do tensor elástico, bem como o módulo de compressibilidade, com restrições de volume máximo. São implementados constrangimentos de simetria com o objetivo de obter topologias com várias simetrias nomeadamente a isotrópica. Por último, são apresentados vários problemas de minimização do coeficiente de Poisson com vista à obtenção de microestruturas auxéticas.

No processo de otimização, é utilizada a teoria da homogeneização que possibilita estimar as propriedades elásticas dos materiais compósitos periódicos, tratando um meio heterogéneo como sendo um meio homogéneo com propriedades mecânicas equivalentes. Visto que se trata de um método simplificativo, existe um erro associado, pelo que é realizada a análise dos efeitos de escala com o fim de validar esta teoria. Foram realizados dois tipos de ensaios numéricos, nomeadamente, o ensaio normalizado de Dirichlet e um ensaio numérico alternativo.

Palavras-chave: Homogeneização, Otimização topológica, Microestruturas, Coeficiente de Poisson

Abstract

This dissertation has as its main concern the optimization of the elastic properties of composite materials of periodic microstructures. It's also studied some factors that can influence the optimization result, and finally the study of the scale-size effects.

This work focus on the properties found in the yz plan of the microstructure, so that, the unit-cell is a two-dimensional model, where third direction (x) is constant in all its domain. The composite material is made of two phases, solid and void (porous material).

The study of the influence factors was done using the problem of the minimization of the compliance with volume constraint. The factors are: finite element mesh discretization, macroscopic load case, sensibilities filter strategy, and the initial design.

In the optimization of the elastic properties study, were obtained several topologies when optimized the different components of the elastic tensor, as well as the optimization of the Bulk modulus. There were implemented material symmetry constraints with the goal of achieving isotropic microstructures. Finally, there's the minimization of the Poisson ratio in order to obtain auxetic materials.

In the optimization process, it's used the homogenization theory that enables to compute the elastic properties of periodic composite materials, replacing the heterogeneous composite properties for a homogeneous material with equivalent mechanic properties. Since we are facing a simplification method, there's an error linked to this, i.e, between the homogenized properties of the material and the real properties, so that, it's important the scale-size effect analysis, in order to authenticate the assumptions used by homogenization. There were used two different numerical experiments, which one is Dirichlet boundary conditions and the other one is an alternative experiment.

Keywords: Homogenization, Topology optimization, Microstructures, Poisson ratio

Índice

Copyright	iii
Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
Índice de Tabelas	xiii
Índice de Figuras	xv
Simbologia e notações	xix
1 Introdução	1
1.1 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO	4
1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	5
2 Estado da arte	7
2.1 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	7
2.1.1 <i>Otimização Topológica</i>	10
2.2 FORMULAÇÕES DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO	11
2.2.1 <i>Minimização da Compliance</i>	12
2.2.2 <i>Maximização de constantes elásticas</i>	13
2.2.3 <i>Constrangimentos de simetria de material</i>	14
2.2.4 <i>Coefficiente de Poisson negativo</i>	21
2.3 APLICAÇÕES DE MATERIAIS COMPÓSITOS	23
2.3.1 <i>Scaffolds</i>	24
2.3.2 <i>Materiais Auxéticos</i>	25
2.3.3 <i>Materiais com compressibilidade negativa ou nula</i>	27
3 Análise e otimização	29
3.1 MODELO DE MATERIAL	29
3.2 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	30
3.2.1 <i>Design Inicial</i>	31
3.2.2 <i>SIMP</i>	32
3.2.3 <i>Homogeneização</i>	33

3.2.4	<i>Análise de Sensibilidades</i>	36
3.2.5	<i>Checkerboard</i>	38
3.2.6	<i>Método das Assíptotas Móveis</i>	40
3.3	TENSORES CONSTITUTIVOS.....	42
3.3.1	<i>Simetrias do tensor</i>	45
3.3.2	<i>Medida de Anisotropia</i>	50
3.4	ENERGIA ELÁSTICA.....	50
3.5	PROPRIEDADES ELÁSTICAS.....	51
3.6	EFEITOS DE ESCALA.....	54
4	Formulação de problemas e ensaios numéricos	55
4.1	FATORES DE INFLUÊNCIA NA OTIMIZAÇÃO	56
4.2	OTIMIZAÇÃO	60
4.2.1	<i>Propriedades elásticas</i>	60
4.2.2	<i>Simetria de material</i>	62
4.2.3	<i>Minimização do coeficiente de Poisson</i>	69
4.3	EFEITOS DE ESCALA.....	76
4.3.1	<i>Ensaio normalizado de Dirichlet</i>	76
4.3.2	<i>Ensaaios alternativos</i>	80
5	Resultados.....	83
5.1	FATORES DE INFLUÊNCIA NA OTIMIZAÇÃO	83
5.2	OTIMIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS	99
5.2.1	<i>Propriedades elásticas</i>	99
5.2.2	<i>Simetria de material</i>	107
5.2.3	<i>Minimização do coeficiente de Poisson</i>	114
5.3	EFEITOS DE ESCALA.....	124
5.3.1	<i>Ensaio normalizado de Dirichlet</i>	126
5.3.2	<i>Ensaaios alternativos</i>	129
6	Conclusões	133
7	Bibliografia	137

Índice de Tabelas

Capítulo 3

TABELA 3.1 – TENSORES DA TENSÃO E DEFORMAÇÃO E RESPECTIVAS NOTAÇÕES CONTRAÍDAS	44
TABELA 4.1 – ESTADOS DE CARGA APLICADOS NA CÉLULA UNITÁRIA NO PLANO YZ	58
TABELA 4.2 – DIFERENTES CÉLULAS INICIAIS	59
TABELA 4.3 - REPRESENTAÇÃO DO TENSOR DE ELASTICIDADE NO PLANO YZ E DAS SUAS SIMETRIAS.....	64
TABELA 5.1 – REPRESENTAÇÃO DAS TOPOLOGIAS ÓTIMAS OBTIDAS USANDO DIFERENTES PARÂMETROS, PERANTE O CASO DE CARGA UNIAXIAL.....	85
TABELA 5.2 -- REPRESENTAÇÃO DAS TOPOLOGIAS ÓTIMAS OBTIDAS USANDO DIFERENTES PARÂMETROS, PERANTE O CASO DE CARGA BIAXIAL.	87
TABELA 5.3 - REPRESENTAÇÃO DAS TOPOLOGIAS ÓTIMAS OBTIDAS USANDO DIFERENTES PARÂMETROS, PERANTE O CASO DE CARGA DE CORTE.	89
TABELA 5.4 -- REPRESENTAÇÃO DAS TOPOLOGIAS ÓTIMAS OBTIDAS USANDO DIFERENTES PARÂMETROS, PERANTE O CASO DE CARGA UNIAXIAL E CORTE.....	91
TABELA 5.5 - REPRESENTAÇÃO DAS TOPOLOGIAS ÓTIMAS OBTIDAS USANDO DIFERENTES PARÂMETROS, PERANTE O CASO DE CARGA BIAXIAL E CORTE.....	92
TABELA 5.6 – TENSORES FINAIS E _{ijklH} COM COEFICIENTES RESPEITANTES AO PLANO YZ E _{2222H} , E _{3333H} E E _{2323H}	100
TABELA 5.7 – REPRESENTAÇÃO DA TOPOLOGIA ÓTIMA, VALOR OBJETIVO FINAL, HISTÓRICO DE OTIMIZAÇÃO E DO TENSOR FINAL DE ELASTICIDADE DO PROBLEMA DA MAXIMIZAÇÃO SIMULTÂNEA DAS COMPONENTES E _{2222H} E E _{3333H}	101
TABELA 5.8 – RESULTADOS REFERENTES AO PROBLEMA DA MAXIMIZAÇÃO DE $w_1E_{2222} + w_2E_{3333}$ COM CONSTRANGIMENTO DE VOLUME.....	103
TABELA 5.9 – RESULTADOS DA MAXIMIZAÇÃO DO MÓDULO DE COMPRESSIBILIDADE COM CONSTRANGIMENTO DE VOLUME, UTILIZANDO FILTRO FIXO.....	104
TABELA 5.10 - RESULTADOS DA MAXIMIZAÇÃO DO MÓDULO DE COMPRESSIBILIDADE K COM CONSTRANGIMENTO DE VOLUME, UTILIZANDO FILTRO VARIÁVEL.	106
TABELA 5.11 – RESULTADOS DA MAXIMIZAÇÃO DA COMPONENTE E _{2222H} COM CONSTRANGIMENTOS DE VOLUME E DE IGUALDADE ENTRE E _{2222H} E E _{3333H}	108
TABELA 5.12 – RESULTADOS DE UMA MICROESTRUTURA ORTOTRÓPICA OBTIDA ATRAVÉS DA MAXIMIZAÇÃO DA COMPONENTE E _{2222H} COM CONSTRANGIMENTOS DE VOLUME E DE ORTROTROPIA.....	109
TABELA 5.13 – RESULTADO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO COM VISTA À OBTENÇÃO DE ISOTROPIA, ATRAVÉS DA MINIMIZAÇÃO DA COMPLIANCE COM FUNÇÕES DE PENALIDADE PARA UM QUARTO DA CÉLULA.	111
TABELA 5.14 – RESULTADOS DO PROBLEMA DE OBTENÇÃO DE ISOTROPIA ATRAVÉS DA MINIMIZAÇÃO DA COMPLIANCE COM CONSTRANGIMENTOS DE VOLUME E DE ISOTROPIA, PARA A CÉLULA UNITÁRIA INTEIRA....	113

TABELA 5.15 - RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DA MINIMIZAÇÃO DA COMPONENTE C2323H E DE v_{23H} COM CONSTRANGIMENTO DE VOLUME.....	115
TABELA 5.16 - RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DA MINIMIZAÇÃO DA COMPONENTE C2323M E DE v_{23M} COM CONSTRANGIMENTO DE VOLUME E DE IGUALDADE ENTRE AS COMPONENTES E2222M E E3333M.....	117
TABELA 5.17 – RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DA MINIMIZAÇÃO DO ERRO ENTRE AS COMPONENTES ELÁSTICAS ALVO DEFINIDAS E O TENSOR HOMOGENEIZADO.....	118
TABELA 5.18- RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DA MINIMIZAÇÃO DA DENSIDADE DE ENERGIA E DO COEFICIENTE DE POISSON.	120
TABELA 5.19 - REPRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS DE UMA MICROESTRUTURA AUXÉTICA ISOTRÓPICA, COM $AK^* =$ 0.03.....	121
TABELA 5.20 – TOPOLOGIAS ÓTIMAS OBTIDAS PARA O ESTUDO DOS EFEITOS DE ESCALA.....	125
TABELA 5.21 – TENSORES DE ELASTICIDADE HOMOGENEIZADOS E_{ijklH} REFERENTES ÀS TOPOLOGIAS ÓTIMAS OBTIDAS, EM [MPa].....	125

Índice de Figuras

FIGURA 2.1 – PROCESSO ITERATIVO NA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL, ADAPTADO DE (COELHO & CARDOSO 2012)	8
FIGURA 2.2- A) OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL, B) OTIMIZAÇÃO DE FORMA, C) OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA. O PROJETO INICIAL ENCONTRA-SE À ESQUERDA E O PROJETO OTIMIZADO À DIREITA, ADAPTADO DE (BENDSØE, M P, SIGMUND 2003)	9
FIGURA 2.3 – MAXIMIZAÇÃO DE DIFERENTES COMPONENTES DO TENSOR ELÁSTICO E RESPECTIVAS MICROESTRUTURAS.	14
FIGURA 2.4 – MODELO FINITO DO FÉMUR ONDE À DIREITA SE ENCONTRA O SCAFFOLD APLICADO, ADAPTADO DE (WIEDING ET AL. 2013)	24
FIGURA 2.5 – EM A) ESTÁ REPRESENTADA A DEFORMAÇÃO DE UM MATERIAL NÃO AUXÉTICO, QUANDO SUJEITO A UMA TENSÃO EM X, ESTE COMPRIME NA DIREÇÃO Y. EM B) ESTÁ REPRESENTADA A DEFORMAÇÃO DE UM MATERIAL AUXÉTICO, QUANDO SUJEITO A UMA TENSÃO EM X, ESTE ALONGA NA DIREÇÃO Y. ADAPTADO DE (EVANS & ALDERSON 2000)	25
FIGURA 2.6 – EM A) ESTÁ REPRESENTADA O FAVO DE MEL NO SEU ESTADO NORMAL E QUANDO SUJEITO A UMA TENSÃO NA DIREÇÃO Y. EM B) ESTÁ REPRESENTADO O FAVO DE MEL INVERTIDO INDEFORMADO E QUANDO SUJEITO A UMA TENSÃO EM Y, COMPRIMINDO NA HORIZONTAL, X. ADAPTADO DE (EVANS & ALDERSON 2000)	26
FIGURA 2.7 – MATERIAIS AUXÉTICOS AO LONGO DE VÁRIAS ESCALAS, ADAPTADO DE (EVANS & ALDERSON 2000)	27
FIGURA 2.8 – A) CÉLULA UNITÁRIA NLC, B) CÉLULA UNITÁRIA NAC, ADAPTADO DE (XIE ET AL. 2014)	28
FIGURA 3.1 -À ESQUERDA ENCONTRA-SE A REPRESENTAÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS (40×40) NA VISTA 3D, ONDE É POSSÍVEL CONSTATAR O ÚNICO ELEMENTO DE ESPESSURA NA DIREÇÃO x . À DIREITA ENCONTRA-SE A MALHA VISTA NO PLANO YZ E O ELEMENTO FINITO DE 8 NÓS.	30
FIGURA 3.2 – FLUXOGRAMA DO ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	31
FIGURA 3.3 - INFLUÊNCIA DA PENALIZAÇÃO DE DENSIDADES NA OTIMIZAÇÃO, ADAPTADO DE (BENDSØE & SIGMUND 1999)	32
FIGURA 3.4 – REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO PROCESSO DE HOMOGENEIZAÇÃO, À ESQUERDA ENCONTRA-SE A CÉLULA HETEROGÊNEA, E À DIREITA A RESPECTIVA CÉLULA EQUIVALENTE COM PROPRIEDADES HOMOGENEIZADAS, ADAPTADO DE (AMIANO 2015)	34
FIGURA 3.5 -EM A) ENCONTRA-SE A REPRESENTAÇÃO DA PERIODICIDADE INFINITA NO DOMÍNIO MICROSCÓPICO EM 3D, EM B) A MESMA REPRESENTAÇÃO NO PLANO yz , E EM C) A CÉLULA UNITÁRIA.	35
FIGURA 3.6 – REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DAS CONDIÇÕES DE PERIODICIDADE NOS DOMÍNIOS MICROSCÓPICOS E MACROSCÓPICOS, ADAPTADO DE (AMIANO 2015).....	35
FIGURA 3.7 – PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO COM APARECIMENTO DE CHECKERBOARD.....	38
FIGURA 3.8 – REPRESENTAÇÃO DE DIFERENTES DISCRETIZAÇÕES DA MALHA. EM A) TEM-SE 20x20 ELEMENTOS, EM B) 30x30 ELEMENTOS, EM C) 40x40 ELEMENTOS E EM D) 50x50 ELEMENTOS.....	39
FIGURA 3.9 – REPRESENTAÇÃO DA VIZINHANÇA DO ELEMENTO k COM O r_{min} ATÉ AO ELEMENTO i	40

FIGURA 3.10 -EM A) ENCONTRA-SE O ESTADO DE CARGA A QUE A MICROESTRUTURA FOI SUJEITA, EM B) ESTÁ ILUSTRADO O RESULTADO DE UMA OTIMIZAÇÃO COM O FILTRO DE SENSIBILIDADES DESLIGADO, APRESENTANDO O PADRÃO DE XADREZ, EM C) ESTÁ ILUSTRADA A TOPOLOGIA ÓTIMA PARA O CASO DE CARGA, TENDO SIDO UTILIZADO O FILTRO DE SENSIBILIDADES.....	40
FIGURA 3.11 – TENSÕES NUM ELEMENTO, ADAPTADO DE (JONES 1999)	43
FIGURA 3.12 -RELAÇÃO ENTRE γ_{ij} E ϵ_{ij}	44
FIGURA 3.13 – REPRESENTAÇÃO DOS OITO TIPOS DE SIMETRIA ELÁSTICA E RESPECTIVOS PLANOS DE SIMETRIA QUE AS DEFINEM, ADAPTADO DE (CHADWICK ET AL. 2001)	45
FIGURA 3.14 – REPRESENTAÇÃO DA CÉLULA UNITÁRIA EM A) E DE SUCESSIVAS REPETIÇÕES DESTA NA DIREÇÃO y E z , B) 2x2, C) 3x3, D) 4x4, E) 5x5.....	54
FIGURA 4.1 -SIMPLIFICAÇÃO DO TENSOR DE ELASTICIDADE	55
FIGURA 4.2 – GRÁFICO DA VARIAÇÃO DO RAO DO FILTRO DE SENSIBILIDADES EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE ITERAÇÕES.	59
FIGURA 4.3 -EM A) ENCONTRA-SE REPRESENTADA A OTIMIZAÇÃO DE UM QUARTO DA MICROESTRUTURA E O EIXO DE SIMETRIA UTILIZADO. EM B) ENCONTRA-SE A MICROESTRUTURA ESPELHADA EM RELAÇÃO AO EIXO HORIZONTAL. EM C) ESTÁ REPRESENTADA A MICROESTRUTURA COMPLETA E O RESPECTIVO REFERENCIAL.	68
FIGURA 4.4 - DESCRIÇÃO GRÁFICA DA RELAÇÃO ENTRE O COEFICIENTE DE POISSON E O VALOR DE $1 + \nu_1 - 2\nu$ PARA MATERIAIS CONVENCIONAIS.	71
FIGURA 4.5 -DESCRIÇÃO GRÁFICA ENTRE OS VALORES DE K , G E ν . (PRAWOTO 2012).	72
FIGURA 4.6 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA DE DIRICHLET. EM A) ENCONTRA-SE UM ENSAIO DE CARREGAMENTO LONGITUDINAL, E EM B) UM ENSAIO DE CARREGAMENTO AO CORTE. ADAPTADO DE (AMIANO 2015).	78
FIGURA 4.7 -EM A) ENCONTRA-SE UMA REPRESENTAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA APLICADAS EM TODO O DOMÍNIO DE MATERIAL. EM B) ENCONTRA-SE UMA REPRESENTAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA APLICADAS NO BORDO DO DOMÍNIO DE MATERIAL.....	79
FIGURA 4.8 – REPRESENTAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA APLICADAS NOS ENSAIOS NUMÉRICOS ALTERNATIVOS (APOIOS MÓVEIS EM DUAS FACES LATERAIS, DESLOCAMENTO DE VALOR B APLICADO EM TODOS OS NÓS DE UMA FACE LIVRE, DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES NULAS NO NÓ DOS ELEMENTOS SHELL COINCIDENTES COM A ORIGEM DO REFERENCIAL).....	81
FIGURA 5.1 – REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DOS HISTÓRICOS DE OTIMIZAÇÃO PARA O MELHOR CASO DE CADA CARREGAMENTO, ONDE A LARANJA CORRESPONDE AO FILTRO FIXO E A AZUL AO FILTRO VARIÁVEL.	94
FIGURA 5.2 – REPRESENTAÇÃO DA ANISOTROPIA DE DIFERENTES RESULTADOS OBTIDOS E RESPECTIVOS TENSORES DE ELASTICIDADE.	96
FIGURA 5.3 – ILUSTRAÇÃO DOS DIFERENTES ESTADOS DE CARGA OBTIDOS A PARTIR DE UM TENSOR ALEATÓRIO.	97
FIGURA 5.4 – COMPARAÇÃO ENTRE AS MICROESTRUTURAS OBTIDAS NA MALHA ($1 \times 20 \times 20$) COM AS OBTIDAS NA MALHA ($1 \times 40 \times 40$)	98

FIGURA 5.5 – APRESENTAÇÃO DAS MICROESTRUTURAS E VALOR DA FUNÇÃO OBJETIVO FINAL REFERENTES À MAXIMIZAÇÃO DAS COMPONENTES E_{2222H} , E_{3333H} E E_{2323H} , SUJEITAS AO CONSTRANGIMENTO DE VOLUME MÁXIMO.	99
FIGURA 5.6 -HISTÓRICO DE OTIMIZAÇÃO DA COMPONENTE ELÁSTICA E_{2222H}	100
FIGURA 5.7 – MICROESTRUTURA ÓTIMA OBTIDA ATRAVÉS DO PROBLEMA DA MAXIMIZAÇÃO DO MÓDULO DE COMPRESSIBILIDADE K COM CONSTRANGIMENTO DE VOLUME, REPETIDA NO PLANO $yz\ 3 \times 3$	105
FIGURA 5.8 - MICROESTRUTURA ÓTIMA REPETIDA NO PLANO $yz\ 3 \times 3$	107
FIGURA 5.9 – MICROESTRUTURA ISOTRÓPICA REPETIDA NO PLANO yz	112
FIGURA 5.10 - REPETIÇÃO DA MICROESTRUTURA PRESENTE NA TABELA 5.15	114
FIGURA 5.11 – REPETIÇÃO DA MICROESTRUTURA PRESENTE NA TABELA 5.16 NO PLANO YZ.	116
FIGURA 5.12- REPRESENTAÇÃO DAS MICROESTRUTURAS OBTIDAS ATRAVÉS DA MINIMIZAÇÃO DO ERRO ENTRE O TENSOR ALVO E O TENSOR HOMOGENEIZADO, REPETIDAS NO PLANO YZ.....	119
FIGURA 5.13 - REPETIÇÃO DA MICROESTRUTURA NO PLANO YZ PRESENTE NA TABELA 5.18.	119
FIGURA 5.14 – MICROESTRUTURA REPETIDA NO PLANO YZ OBTIDA ATRAVÉS DO PROBLEMA DA MINIMIZAÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON COM CONSTRANGIMENTOS DE VOLUME, DE MÓDULO DE COMPRESSIBILIDADE MÍNIMO E DE ISOTROPIA.	122
FIGURA 5.15 - EXEMPLOS DE DOIS TIPOS DE MICROESTRUTURAS AUXÉTICAS COM SIMETRIA ISOTRÓPICA. ADAPTADO DE (ANDREASSEN ET AL. 2014).....	123
FIGURA 5.16 - REPRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DAS CONDIÇÕES DE DIRICHLET REFENTES À TOPOLOGIA ÓTIMA SUJEITA À CARGA BIAxIAL. AS LINHAS NOS GRÁFICOS REFEREM-SE AOS VALORES DOS COEFICIENTES DE POISSON, E AS COLUNAS AO DESVIO ENTRE OS COEFICIENTES HOMOGENEIZADOS E OS OBTIDOS NUMERICAMENTE.....	127
FIGURA 5.17 - REPRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DAS CONDIÇÕES DE DIRICHLET REFENTES À TOPOLOGIA ÓTIMA SUJEITA À CARGA CORTE.....	127
FIGURA 5.18 - REPRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DAS CONDIÇÕES DE DIRICHLET REFENTES À TOPOLOGIA ÓTIMA SUJEITA À CARGA UNIAXIAL E CORTE.....	128
FIGURA 5.19 - REPRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DAS CONDIÇÕES ALTERNATIVAS, REFENTES À TOPOLOGIA ÓTIMA SUJEITA À CARGA BIAxIAL. AS LINHAS NOS GRÁFICOS REFEREM-SE AOS VALORES DOS COEFICIENTES DE POISSON, E AS COLUNAS AO DESVIO ENTRE OS COEFICIENTES HOMOGENEIZADOS E OS OBTIDOS NUMERICAMENTE.....	130
FIGURA 5.20 - REPRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DAS CONDIÇÕES ALTERNATIVAS, REFENTES À TOPOLOGIA ÓTIMA SUJEITA À CARGA CORTE.....	130
FIGURA 5.21 - REPRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DAS CONDIÇÕES ALTERNATIVAS, REFENTES À TOPOLOGIA ÓTIMA SUJEITA À CARGA UNIAXIAL E CORTE.	131

Simbologia e notações

Latim

\mathcal{A}	Parâmetro adimensional que quantifica a anisotropia de material.
\mathbf{C}^D, C_{ijkl}^D	Tensor de flexibilidade estimado a partir das condições de Dirichlet
\mathbf{C}^H, C_{ijkl}^H	Tensor da flexibilidade homogeneizado.
D	Dimensão característica do domínio macroscópico.
d	Dimensão característica do domínio microscópico.
E^0	Módulo de elasticidade do material base da microestrutura.
E_{ijkl}	Tensor da elasticidade ou rigidez.
\mathbf{E}^D, E_{ijkl}^D	Tensor de elasticidade estimado através das condições de Dirichlet.
\mathbf{E}^H, E_{ijkl}^H	Tensor da elasticidade ou rigidez homogeneizado.
\mathbf{E}^T, E_{ijkl}^T	Tensor de elasticidade alvo.
$E_{sólido}$	Módulo de elasticidade do material 1 (sólido).
E_{vazio}	Módulo de elasticidade do material 2 (vazio).
f	Função objetivo.
F_{Obj}^{final}	Função objetivo final.
$\overline{F_{Obj}^{final}}$	Média da função objetivo final.
$F_{Obj}^{inicial}$	Função objetivo inicial.
$\overline{F_{Obj}^{inicial}}$	Média da função objetivo inicial.
G	Módulo de corte do material.
g_i	Funções de contrangimento
\hat{H}	Operador de convulsão utilizado no filtro de sensibilidades.
K	Módulo de compressibilidade.
K^H	Módulo de compressibilidade homogeneizado.
K^*	Limite máximo do módulo de compressibilidade.

n	Fator de escala.
N	Número de elementos que compõem a malha.
p	Expoente de penalização do modelo SIMP.
r_{min}	Raio do filtro de sensibilidades.
V_{max}	Limite superior para a fração volúmica de material disponível.
w_i	Fator peso da função objetivo.
W	Trabalho por unidade de volume.
Y	Domínio microscópico.

Grego

β	Constante arbitrária.
γ	Distorção.
δ_{ij}	Delta de Kronecker.
δ	Tolerância atribuída a constrangimentos de igualdade.
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	Tensor das extensões.
ε_{rs}^0	Campo de deslocamento macroscópico médio.
λ	Primeira constante de Lamé.
μ	Função densidade microscópica.
ν	Coeficiente de Poisson do material.
ν^*	Coeficiente de Poisson estimado através de ensaios numéricos.
ν^D	Coeficiente de Poisson estimado através das condições de Dirichlet.
ν^H	Coeficiente de Poisson homogeneizado.
ρ	Função densidade macroscópica.
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Tensor das tensões.
$\overline{\sigma_{obj}^{final}}$	Desvio padrão da função objetivo final.
τ	Tensão de corte.

Ψ Domínio macroscópico.

ψ Função arbitrária.

Operadores

$\langle . \rangle$ Simbologia que se refere à média.

Abreviaturas

APDL Ansys Parametric Design Language

MMA Method of Moving Asymptotes

SIMP Solid Isotropic Material with Penalisation

1 Introdução

A Engenharia é uma área bastante abrangente que consiste na aplicação do conhecimento científico e daquele que é adquirido no quotidiano, como o social e económico, com o objetivo de criar, desenvolver, manter, aplicar e otimizar máquinas, dispositivos, estruturas, materiais ou processos de modo a possibilitar e a facilitar a vida do ser humano. Desde a antiguidade que a Engenharia ocupa um importante papel no desenvolvimento da civilização tendo contribuído para a invenção de objetos indispensáveis na sociedade, tais como a roda e a alavanca, até aos dias de hoje onde estamos constantemente em contacto com produtos criados a partir da engenharia, nomeadamente o computador ou o veículo motorizado.

Dos vários campos que constituem a Engenharia, nesta dissertação é focada a área da análise e otimização estrutural. No projeto de estruturas e materiais compósitos, é preciso ter em conta as propriedades mecânicas dos materiais e a que tipo de carregamentos, tensões e/ou deslocamentos, as estruturas estão sujeitas, de modo a cumprir os requisitos para o qual estas foram concebidas. Assim, é necessário proceder a uma análise estrutural de modo a apurar a qualidade da estrutura para a função pretendida. Para isto existem três métodos principais: 1) método analítico, 2) método numérico, 3) método experimental, sendo este último alvo de um maior número de condicionantes, tais como o orçamento, qualidade do local de trabalho, erro humano e a própria complexidade do objeto em estudo.

Os métodos analíticos ou *modelos matemáticos* passam pela descrição das características principais do comportamento de um sistema através de um conjunto de equações com parâmetros e variáveis que o relacionam. As resoluções destes

Introdução

problemas variam quanto à sua complexidade, podendo algumas ser complicadas ao ponto de a sua resolução se tornar intratável.

Como tal, ao longo destas últimas épocas tem-se assistido a um desenvolvimento computacional enorme, o que tem possibilitado a resolução de vários problemas através de métodos numéricos, que se caracterizam pela sua eficiência e rigor. Entre os métodos numéricos, o *Método dos Elementos Finitos* (MEF) destaca-se pela sua polivalência na resolução de problemas no domínio da engenharia e da física. Este método é utilizado na dissertação para realizar a análise estrutural dos compósitos em estudo através do *software* Ansys.

No MEF, o domínio do problema é decomposto em vários sub-domínios, onde as suas equações são aproximadas através de um *método variacional*. A razão pela qual este método é aplicado consiste no facto de ser mais fácil aproximar uma função complexa através de várias equações dos vários sub-domínios de simples resolução que regem o sistema, onde o erro pode ser tão pequeno quanto maior for a quantidade dos sub-domínios utilizados e melhor for a qualidade das funções de aproximação.

Ao longo dos últimos anos, caracterizados pela produção em massa e uma inovação tecnológica incessante, o termo otimização tem ganho um espaço cada vez mais preponderante no seio da Engenharia. A otimização representa um problema de minimização ou maximização de uma função objetivo de variáveis contínuas ou discretas, sujeita a determinados constrangimentos, que visa obter a solução ótima para um determinado problema, o que aplicado na Engenharia permite, por exemplo, uma minimização dos custos de produção de um dado objeto/projeto através da redução de material, ou da opção por um material mais barato, que cumpra os mesmos ou melhores requisitos, mão de obra e energia. Para além destas utilidades, nos dias de hoje, onde os recursos energéticos e materiais começam a escassear devido à sua utilização em demasia, a otimização tem um impacto bastante positivo na sociedade e no meio ambiente, uma vez que permite a redução do consumo dos combustíveis fósseis e de materiais nocivos à saúde pública e à Natureza.

A otimização das propriedades do material assume então um papel importante no *design* das estruturas visto que, a utilização do material certo para determinadas funções pode significar a diminuição do peso da estrutura, uma maior rigidez, uma melhoria da condutividade elétrica ou térmica, maximização do módulo de Compressibilidade ou de Rigidez, ou garantir características no material raramente

encontradas na Natureza, como materiais com coeficiente de Poisson negativo (auxéticos) ou materiais com compressibilidade nula ou negativa.

Estas características podem ser encontradas em microestruturas projetadas através da otimização topológica, que é um processo iterativo que consiste em distribuir o material num determinado volume ou área segundo uma determinada função objetivo sujeita a certos constrangimentos, de modo a obter o *design* ótimo da microestrutura do material. A mesma será descrita mais aprofundadamente ao longo desta dissertação.

Em relação aos materiais compósitos, estes são obtidos através da junção de dois ou mais constituintes, denominados de fases, onde cada um destes tem propriedades mecânicas, físicas ou químicas diferentes. Através da combinação destes materiais, tornou-se possível a obtenção de novos materiais com propriedades especializadas para a determinada função a cumprir, tais como uma elevada resistência em comparação com o respetivo peso reduzido, materiais com características de flexibilidade únicas, podendo ser moldados em formas e geometrias com alto grau de complexidade.

Dentro dos materiais compósitos existem várias classes sendo que nesta dissertação, são considerados mais concretamente os compósitos de microestrutura periódica. Nesta classe de compósitos, considera-se uma célula base de dimensões unitárias que é replicada em todas as direções espaciais, o que descreve a heterogeneidade do meio.

O estudo das propriedades mecânicas de um meio periódico heterogéneo recorrendo à utilização de meios analíticos ou numéricos pode causar problemas de ordem computacional quando o número de heterogeneidades se torna num valor elevado. Quando isto acontece é comum a utilização de técnicas de simplificação, nomeadamente a técnica de simplificação de cálculo de propriedades mecânicas equivalentes denominada de Homogeneização. Esta técnica consiste na aproximação das propriedades mecânicas de uma estrutura periódica, substituindo o meio heterogéneo por um meio homogéneo com propriedades mecânicas equivalentes, permitindo uma análise numérica mais extensa com menores gastos computacionais. No entanto, como em todos os métodos de simplificação, existe um grau de erro associado a este, que relaciona as características mecânicas do material heterogéneo com o material homogéneo equivalente, tornando-se necessário o estudo dos efeitos de escala de modo a comprovar a eficácia do método da homogeneização.

1.1 Objetivos da Dissertação

A presente dissertação tem como objetivo o contributo para o desenvolvimento científico na área da otimização e análise estrutural de materiais compósitos de microestrutura periódica de duas fases, sólido e vazio. Para isto é utilizada a técnica de otimização topológica com o fim de obter a microestrutura do material ótima para realizar eficientemente a função para a qual foi projetada. Esta técnica permite a obtenção de materiais com características especiais raras ou até inexistentes na Natureza, que possam contribuir para a continuidade do forte desenvolvimento tecnológico a que se tem assistido, sendo esta uma das principais motivações deste trabalho.

A realização desta dissertação teve início com a aquisição de conhecimentos na área da otimização topológica e dos vários fatores que a influenciam e caracterizam (Bendsøe e Sigmund 2003). Para aprofundar os conhecimentos utilizou-se um código de otimização topológica em duas dimensões no *software* Matlab (Sigmund 2001) e outro de otimização em três dimensões também em Matlab (Liu & Tovar 2014), onde foram corridos diversos casos, desde a alteração das condições de fronteira à alteração de parâmetros relacionados com o algoritmo, como por exemplo o tamanho do raio do filtro das sensibilidades, a constante de penalização ou a fração volúmica. Este trabalho inicial contribuiu essencialmente para uma familiarização com estes parâmetros.

Posto isto, passou-se à utilização de um código de otimização em FORTRAN onde foram realizadas diversas otimizações com diferentes malhas ($1 \times 20 \times 20$, $1 \times 30 \times 30$, $1 \times 40 \times 40$, $1 \times 50 \times 50$), diferentes estratégias de filtro, células iniciais e casos de carga, como será descrito mais à frente nesta dissertação. Para esta parte do trabalho, a função objetivo considerada foi a minimização da flexibilidade sujeita ao constrangimento de volume. Tendo adquirido o conhecimento e a experiência sobre o algoritmo de otimização, procedeu-se à definição das seguintes funções objetivo e suas otimizações: a maximização de diferentes constantes elásticas do tensor da elasticidade, a maximização da rigidez sujeita a simetrias ortotrópicas, cúbicas e isotrópicas; a maximização do módulo de Compressibilidade e do módulo de Corte; a minimização do coeficiente de Poisson com a perspectiva de obtenção de materiais auxéticos (coeficiente de Poisson negativo).

O objetivo desta dissertação passa também pelo estudo dos efeitos de escala relativos ao coeficiente de Poisson, isto é, calcular o erro entre as propriedades mecânicas do material obtidas através de ensaios numéricos utilizando códigos APDL (*ANSYS Parametric Design Language*) e as propriedades mecânicas do material obtidas pelo método da homogeneização, de forma a poder validar esta teoria de simplificação aplicada ao coeficiente de Poisson.

1.2 Estrutura da dissertação

A dissertação é composta por 6 capítulos, sendo que o presente capítulo se refere à introdução onde são mencionados os objetivos e motivações pelos quais este trabalho será realizado.

No capítulo 2 é realizada uma revisão literária sobre os vários temas abordados nesta dissertação. Sendo eles a análise e otimização estrutural e topológica, focando nas formulações existentes dos problemas que vão ser trabalhados nesta dissertação. Para além disto, são apresentadas as características dos materiais compósitos de microestrutura periódica e várias aplicações destes na indústria.

O capítulo 3 é um capítulo fundamentalmente teórico, onde são apresentados os principais fundamentos da mecânica estrutural que estão na base desta dissertação. É apresentado o modelo material utilizado e são explicados os principais processos e metodologias utilizados na análise e otimização de estruturas. Encontra-se também o estudo da medida da anisotropia, bem como a teoria do estudo dos efeitos de escala.

No capítulo 4 são explicados os problemas abordados. Este encontra-se dividido em três secções, nomeadamente da análise de fatores de otimização realizada sobre o problema clássico da otimização topológica; a otimização das propriedades elásticas, onde são caracterizadas as funções objetivo, funções de constrangimento e respetivos gradientes; e a caracterização dos ensaios numéricos realizados com vista ao estudo dos efeitos de escala do coeficiente de Poisson.

Os resultados e respetivos comentários encontram-se no capítulo 5. Tal como o capítulo 4, este também se encontra dividido nas mesmas três secções de modo a facilitar a compreensão dos resultados em relação ao problema em causa. Na primeira são apresentadas as topologias ótimas das microestruturas quando sujeitas a diferentes estados de carga, estratégia de filtragem e células iniciais. Na segunda são

Introdução

demonstradas as várias topologias obtidas através da otimização dos vários problemas formulados. Na terceira secção são apresentados os resultados obtidos do estudo dos efeitos de escala do coeficiente de Poisson através das análises numéricas.

Por último, tem-se o capítulo 6 onde são discutidos os resultados obtidos, fazendo uma análise aos fatores positivos e negativos de todo este trabalho. Esta dissertação termina com uma consideração sobre possíveis trabalhos futuros que possam ser realizados de modo a dar continuação a esta dissertação.

2 Estado da arte

A área da otimização estrutural tem sido alvo de interesse há várias décadas. Os primeiros trabalhos analíticos sobre este tema foram publicados por Maxwell (1890) e Michell (1904). No entanto, assistiu-se somente ao forte desenvolvimento deste conceito no início da década de 50 quando surgiram os primeiros computadores digitais, métodos numéricos de programação matemática e métodos de análise de estruturas como o método dos elementos finitos. Desde então que se presenciou uma nova fase da otimização estrutural sendo denominada de otimização estrutural moderna (Coelho & Cardoso 2012).

2.1 Otimização Estrutural

A otimização estrutural é uma área científica que abrange um conjunto de métodos e teorias com o intuito de obter a estrutura que desempenhe mais eficientemente a função desejada, tendo como ideia fundamental a determinação de um conjunto de parâmetros da estrutura, variáveis de projeto, de modo a minimizar ou maximizar a função objetivo (função custo) sem violar os constrangimentos impostos relacionados com a estabilidade e segurança da estrutura. De realçar a importância deste método no projeto de estruturas complexas com um elevado número de parâmetros e constrangimentos bem como a sua capacidade de organizar a atividade de projeto. O projeto ótimo de estruturas segundo este método é um processo iterativo como demonstrado na figura 2.1:

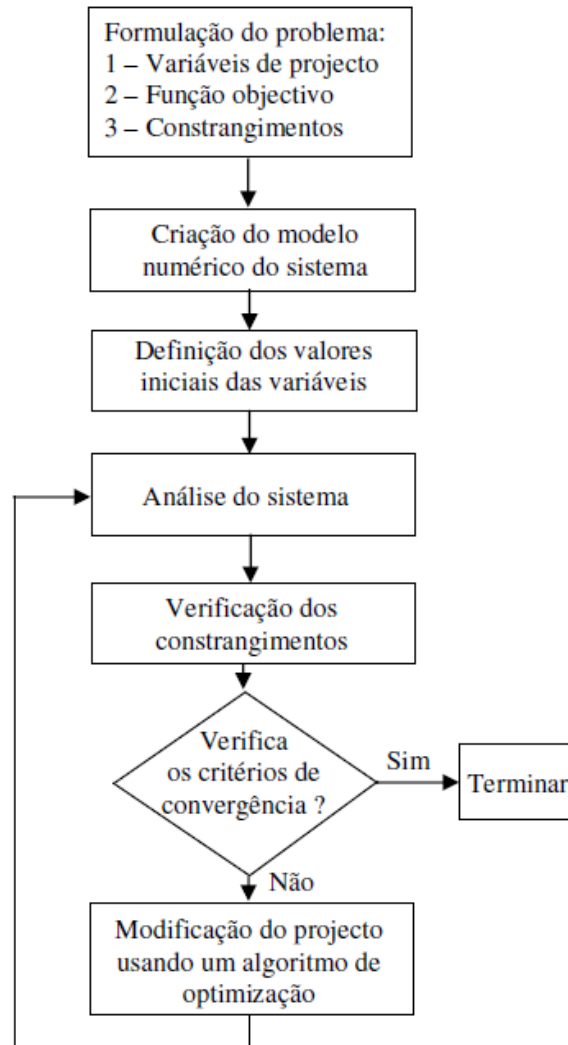


Figura 2.1 – Processo Iterativo na otimização estrutural, adaptado de (Coelho & Cardoso 2012)

A otimização estrutural pode ser dividida em três classes principais, sendo estas: otimização dimensional, otimização de forma e a otimização de topologia. Pode também ser considerada, para além destas três categorias, a otimização de material onde o objetivo é encontrar o material ótimo, mantendo a geometria e as dimensões da estrutura iniciais.

A otimização estrutural moderna estava sobretudo direccionada para a resolução de problemas de otimização dimensional. Neste tipo de problemas, as variáveis de projeto são as dimensões das secções transversais dos elementos da estrutura. Geralmente, trata-se de um processo de otimização com variáveis discretas em que as soluções são combinações de valores de um determinado conjunto definido de soluções normalizadas.

Na década de 1970 surgiu um novo tipo de otimização que complementou a otimização dimensional. A otimização de forma consiste na otimização de uma estrutura com a sua topologia previamente definida, onde se considera a variável de projeto a fronteira Γ que delimita o domínio Ω que esta ocupa. A fronteira Γ pode ser definida por um conjunto de pontos, uma linha ou uma superfície. Estas são então as variáveis de projeto neste tipo de otimização, onde o objetivo é encontrar a geometria ótima da fronteira Γ , que minimize a função objetivo. Tendo em conta que na otimização de forma a topologia inicial da estrutura permanece inalterada, a solução final dependerá desta, ou seja, se a topologia inicial não for a melhor, a solução final não será a melhor consequentemente.

Estes dois tipos de otimização podem ser utilizados individualmente, no entanto apresentam limitações que podem impedir que se chegue a uma solução ótima. Para contornar esta situação, a utilização destes dois métodos em conjunto é aconselhável para a obtenção de melhores resultados.

No início da década de 1980 surge a otimização topológica como alternativa aos métodos de otimização descritos. Este tipo de otimização representa um processo de onde se distribui o material disponível pela área ou volume imposto, através da remoção gradual de pequenas porções de material que apresentem um baixo nível de tensão, não estando por isso a ser utilizado eficientemente na transmissão de esforços internos. Os três processos de otimização estão representados na seguinte figura:

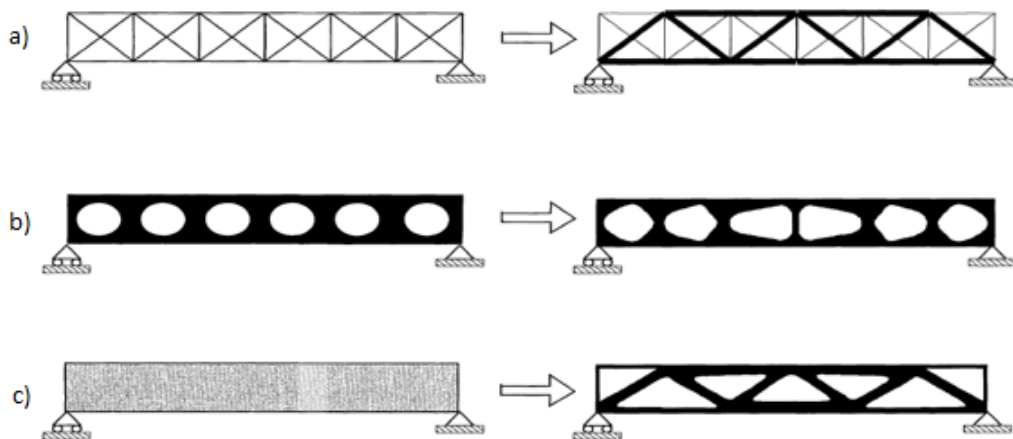


Figura 2.2- a) Otimização dimensional, b) Otimização de forma, c) Otimização topológica. O projeto inicial encontra-se à esquerda e o projeto otimizado à direita, adaptado de (Bendsøe, M P, Sigmund 2003)

A otimização topológica possui dois grupos principais: A otimização a partir de um meio discreto e a otimização a partir de um meio contínuo.

A otimização topológica a partir de um meio discreto, também conhecido por *Ground Structure Approach*, é especificamente aplicado a estruturas reticuladas, onde a otimização tem como objetivo descobrir qual a conectividade barras que minimiza o peso da estrutura e satisfazem os constrangimentos de encurvadura, deslocamento ou tensão.

Em relação à otimização de topologia em meios contínuos, é aplicado usualmente um método conhecido por *Hard-Kill Method*, também conhecido por *Fully Stressed Design Technique*. Neste caso, considera-se um domínio em meio contínuo Ω discretizado por uma malha de elementos finitos. O processo de otimização consiste em determinar em cada ponto na malha a presença ou não de material, sendo esta descrita por variáveis booleanas (0 ou 1), que representam a ausência (0) ou existência (1) de material.

2.1.1 Otimização Topológica

Como já referido, a otimização de topologia destaca-se pela eficiência na procura do design ótimo. Na sua aplicação a materiais compósitos de microestrutura periódica, possibilita o desenvolvimento de materiais de elevada performance e multifacetados (que cumpram mais do que um objetivo). O objetivo deste tipo de otimização é determinar a distribuição de material com uma fração volúmica específica num determinado domínio Ω , que minimize a função custo dado um conjunto de restrições ou constrangimentos (Cadman et al. 2013). De seguida encontra-se representada uma formulação matemática de um problema convencional de otimização topológica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mu} f(\mu) \\ \text{sujeito a} \quad V = \sum_{i=1}^N \mu_i v_i \leq V^* \\ 0 < \mu_i \leq 1, i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Onde $f(\mu)$ representa a função objetivo a ser otimizada, V^* é o volume limite, V é a fração volúmica, v_i e μ_i são a fração volúmica e densidade, respetivamente, de cada um dos N elementos finitos.

Contudo, os problemas de otimização topológica formulados através de elementos finitos com polinómios interpoladores de grau reduzido (1ª ordem) apresentam vários problemas numéricos, tais como os padrões de checkerboard, onde os elementos sólidos (preto) e vazios (branco) aparecem de forma alternada formando um padrão

de xadrez, sendo indesejável na medida em que criam resultados de rigidez artificial (Díaz & Sigmund 1995). Existe também o problema da dependência da malha que resulta da obtenção de resultados diferentes em malhas de tamanhos diferentes, para a mesma função objetivo e constrangimentos (Sigmund & Petersson 1998).

Para contornar estes problemas numéricos, adota-se a utilização de elementos de ordem superior (de segunda ordem ou superior); o uso de técnicas de relaxamento, como a homogeneização (Bendsøe 1989); métodos de restrição, como o controlo do perímetro; constrangimentos de gradientes globais e locais, de modo a garantir a existência das derivadas parciais evitando singularidades (Petersson & Sigmund 1998); técnicas de filtragem; métodos de difusão não lineares e esquemas de interpolação de material, tais como o SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) (Bendsøe 1989), ou RAMP (*Rational approximation of material properties*), ver (Bendsøe, M P, Sigmund 2003).

Os problemas de otimização topológica envolvem geralmente um número bastante elevado de variáveis de projeto, o que torna a sua resolução desafiadora devido ao tempo de computação. Como tal, surgiram algoritmos que permitiram uma convergência mais rápida e eficaz, nomeadamente o OC (Optimality Criteria) em (Zhou & Rozvany 1992); o MMA (*Method of moving asymptotes*) de (Svanberg 1987). Também existem os seguintes algoritmos aplicados à otimização topológica: o ESO (*Evolutionary structural optimization*) e BESO (*Bidirectional evolutionary structural optimization*) em (Xie & Steven 1997); e o GA (*Genetic Algorithm*) em (Ti 2002).

2.2 Formulações de problemas de otimização

A presente dissertação tem como um dos objetivos a otimização das propriedades elásticas de materiais de microestrutura periódica. No capítulo 5 são demonstradas diferentes microestruturas obtidas através da otimização de diferentes constantes elásticas do tensor de elasticidade. Com a aquisição de experiência e conhecimento sobre o algoritmo e os desafios normalmente adjacentes ao problema da otimização, procedeu-se à obtenção de diferentes tipos de materiais, materiais com a densidade de energia de tensão minimizada, materiais compósitos com simetria de isotropia e materiais compósitos auxéticos (coeficiente de Poisson negativo).

Nesta secção será demonstrada uma revisão bibliográfica sobre as diversas formulações existentes para otimização da microestrutura destes materiais.

2.2.1 Minimização da *Compliance*

O problema da minimização da *Compliance* (flexibilidade), com constrangimento de volume representa o problema tradicional da otimização topológica. Este problema passa pela maximização da rigidez da microestrutura da célula unitária ou da minimização da sua flexibilidade. A formulação em (2.2) tem como base a tensão, ou seja, a otimização da distribuição de material da microestrutura depende dos valores do campo de tensão macroscópico aplicado ao material.

$$\min_{\mu} C_{ijkl}^H(\mu) \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl} \quad (2.2a)$$

$$\text{sujeito a } \int_Y \mu(y) dY \leq V^*; \quad 0 < \mu \leq 1, \quad y \in Y \quad (2.2b)$$

Onde μ representa a densidade local, entre um valor muito baixo, por exemplo 10^{-5} e 1, dependendo da variável de posição y da célula base no domínio Y . C_{ijkl}^H é o tensor da *compliance* homogeneizado, e $\bar{\sigma}$ representa o tensor que caracteriza o campo de tensões médias macroscópicas aplicadas no compósito, e V^* representa o volume limite de material.

Sobre este problema, foi realizada uma análise extensiva a fatores que influenciam o processo de otimização até à solução ótima. Nomeadamente a realização de otimizações com diferentes malhas (1x20x20, 1x30x30, 1x40x40, 1x50x50), de modo a verificar qual a malha que produz a melhor relação entre a qualidade de resultados e custo computacional, e se existe dependência da malha, ou seja, se existem topologias ótimas diferentes nas diferentes malhas utilizadas. A escolha da célula inicial pode influenciar também a solução final, devido à existência de vários mínimos locais existentes nos problemas de otimização (Bendsøe & Sigmund 2003), pelo que é realizada a otimização partindo de quatro topologias iniciais diferentes de modo a verificar diferenças ou não nas soluções finais. O efeito do filtro de sensibilidades foi também estudado, tendo sido testado duas estratégias diferentes de filtragem. Todas estas condicionantes da otimização topológica foram testadas sujeitando a microestrutura a diversos campos de tensão macroscópicos.

2.2.2 Maximização de constantes elásticas

O tensor da *compliance* ou flexibilidade é o inverso do tensor da rigidez, ou seja:

$$C_{ijkl} = E_{ijkl}^{-1} \quad (2.3)$$

O tensor elástico efetivo em duas dimensões de um material ortotrópico pode ser escrito sob a forma de matriz:

$$E^H = \begin{pmatrix} E_{1111}^H & E_{1122}^H & 0 \\ E_{2211}^H & E_{2222}^H & 0 \\ 0 & 0 & E_{1212}^H \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

As relações constitutivas e de simetria dos tensores de elasticidade e flexibilidade serão apresentadas no capítulo 3.

A formulação de problemas de maximização das constantes elásticas do tensor de elasticidade tem como base a deformação, ou seja, é dado um campo de deformações ε^0 fixo, que exprime o termo de energia efetiva de deformação $E_{ijkl}^H \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0$, sendo E_{ijkl}^H o tensor de elasticidade homogeneizado. Deste modo, a maximização das propriedades elásticas pode ser formulada da seguinte maneira:

$$\max_{\mu} \Phi = \sum w_{ij} E_{ij}^H \quad (2.5a)$$

$$\text{sujeito a} \quad V(\mu) = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i \leq V^* \quad (2.5b)$$

$$0 < \delta < \mu_i < 1, \quad t = 1, n \quad (2.5c)$$

Onde w_{ij} é o fator peso na otimização das diferentes constantes elásticas do tensor E_{ij}^H , $V(\mu)$ representa o volume total de material da microestrutura, μ_t e v_t a densidade e volume de cada elemento respetivamente, V^* é o volume limite de material, δ representa o limite inferior da densidade de cada elemento μ_i , por exemplo 10^{-4} , usado para evitar singularidades na matriz de rigidez dos elementos. A passagem de um tensor de quarta ordem E_{ijkl}^H para uma representação matricial deve-se à simplificação usada nos índices do tensor através da notação de Voigt-Kelvin: 11→1, 22→2, 33→3, 23→4, 31→5, 12→6. Assim, a componente elástica E_{1111}^H pode ser representada simplesmente por E_{11}^H (Zhang et al. 2007).

A figura 2.3 pretende demonstrar a relação da maximização individual das diferentes constantes elásticas do tensor com a distribuição de material final na microestrutura.

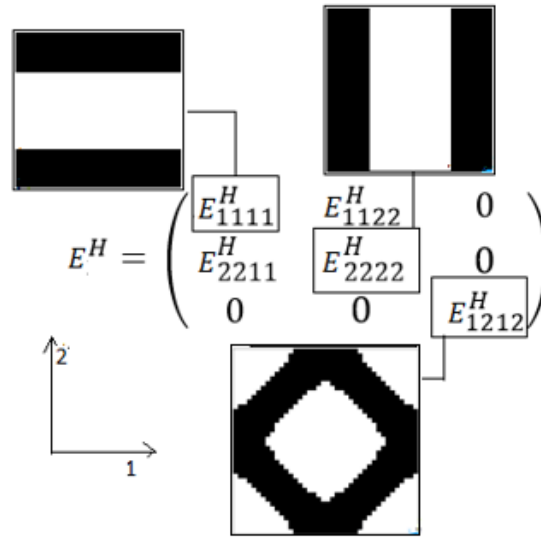


Figura 2.3 – Maximização de diferentes componentes do tensor elástico e respetivas microestruturas.

Com esta representação, é possível verificar que quando se pretende a maximização da componente horizontal (E^H_{1111}) e da componente vertical (E^H_{2222}), a distribuição de material na microestrutura tem como objetivo somente maximizar a resistência à tração e à compressão nas direções axiais 1 e 2, respetivamente, da célula. Quanto à maximização da componente de resistência ao corte E^H_{1212} , esta tem uma distribuição de material desfasada de aproximadamente 45° às direções 1 e 2.

2.2.3 Constrangimentos de simetria de material

Em (Sigmund & Torquato 1997) é usado o processo de otimização topológica para determinar a distribuição ótima de um material compósito de três fases com um comportamento de expansão térmica extrema com simetria isotrópica. A formulação do problema é redigida do seguinte modo:

$$\min_{x_1, x_2} \Phi(x_1, x_2) = f(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) + w_1 Error_{sqr} + w_2 Error_{iso} + w_3 Error_{therm} \quad (2.6a)$$

$$\text{sujeito a} \quad g_{i(\min)} \leq g_i(C_{ijkl}), i = 1, \dots, M; \quad (2.6b)$$

$$c_{min}^{(1)} \leq c^1 \leq c_{max}^{(1)}; \quad (2.6c)$$

$$c_{min}^{(2)} \leq c^2 \leq c_{max}^{(2)}; \quad (2.6d)$$

$$0 < x_{min} \leq x_1 \leq 1; \quad (2.6e)$$

$$0 < x_2 \leq 1; \quad (2.6f)$$

O problema formulado, em duas dimensões, serve especificamente para a minimização ou maximização dos coeficientes de expansão térmica $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$, de materiais com três fases, onde c^1 e c^2 representam a fração volúmica do material sólido 1 e 2 respetivamente, onde x_1 e x_2 são os N -vetores das variáveis de projeto. Para este caso a fase 3 é considerado o vazio. De modo a evitar problemas computacionais, como a singularidade da matriz rigidez na formulação dos elementos finitos, o limite inferior de x_1 é alterado de zero para um $x_{min} = 10^{-4}$. Experiências numéricas ditam que as regiões sem material não possuem significado estrutural pelo que podem ser vistas como regiões de vazio, ou seja, o limite inferior pode ser zero. Na otimização há que conferir um mínimo de rigidez à microestrutura e para isso, introduz-se um limite inferior desta. O constrangimento em (2.7) pode ser escrito para materiais isotrópicos como um limite inferior do módulo de Compressibilidade:

$$K_{min}^{(*)} \leq K^* = \left(\frac{(E_{1111} + E_{2222})}{2} + \frac{E_{1122}}{2} \right) \quad (2.7)$$

Com vista à obtenção das simetrias ortotrópica, cúbica e isotrópica (explicitadas no capítulo 3) é necessário a implementação destas na formulação. A ortotropia nos materiais pode ser obtida especificando um eixo de simetria na célula base. Assumindo que o material é ortotrópico, para conseguir a simetria quadrada no tensor da elasticidade é somente preciso definir:

$$E_{1111} - E_{2222} = 0 \quad (2.8)$$

Para atingir as condições de isotropia é preciso adicionar à equação (2.8) o seguinte constrangimento:

$$(E_{1111} + E_{2222}) - 2(E_{1122} + 2E_{1212}) = 0 \quad (2.9)$$

Na formulação em causa, as simetrias do tensor de elasticidade são impostas através de funções de penalidade à função objetivo definidas da seguinte maneira:

$$Error_{sq} = \left(\frac{(E_{1111} - E_{2222})}{(E_{1111}^{(*)} + E_{2222}^{(*)})} \right) \quad (2.10)$$

$$Error_{iso} = \left(\frac{((E_{1111} + E_{2222}) - 2(E_{1122} + 2E_{1212}))^2}{(E_{1111} + E_{2222})^2} \right) + Error_{sq} \quad (2.11)$$

Onde $Error_{sq}$ surge como a função de penalidade para o constrangimento de simetria quadrada e $Error_{iso}$ representa a função de penalidade para o constrangimento de isotropia. Os parâmetros w funcionam como pesos às funções de penalidade, assumindo valores diferentes de zero. Ainda que nesta formulação se encontrem termos que não foram discriminados nesta dissertação, considerou-se a introdução destes constrangimentos de simetria do problema, como será averiguado no capítulo 4.

Em (Guest & Prevost 2006) a otimização topológica é utilizada no desenvolvimento de materiais multifuncionais, em três dimensões, com propriedades ótimas de rigidez e permeabilidade do fluído, com restrições de simetria. O problema de otimização é formulado de maneira a que a microestrutura possa ser manipulada consoante o tamanho e o peso desejado, mantendo a rigidez e a permeabilidade na função objetivo, como seguidamente descrito:

$$\min_{\mu} -\alpha_{stiff} f_{stiff} + \alpha_{perm} f_{perm} + w_{stiff} error_{stiff} - w_{perm} error_{perm} \quad (2.12a)$$

$$\text{sujeito a} \quad V_{\min} \leq \sum_{i=1}^n \mu_i v_i \leq V_{\max} \quad (2.12b)$$

$$\mu_{\min} \leq \mu_i \leq 1 \quad (2.12c)$$

Onde α_{stiff} e α_{perm} são pesos relativos à função objetivo de rigidez f_{stiff} e de permeabilidade f_{perm} , respetivamente, sendo que $\alpha_{stiff} + \alpha_{perm} = 1$, e w_{stiff} e w_{perm} são os pesos das funções de penalidade da simetria de rigidez e fluido $error_{stiff}$ e $error_{perm}$, respetivamente. De modo a evitar o mínimo local, w_{stiff} e w_{perm} são inicialmente definidos com um valor baixo, por exemplo 1.0, que vai aumentando progressivamente com o decorrer das iterações. Como nesta dissertação não se consideram os efeitos da permeabilidade nas microestruturas, tem-se que $\alpha_{perm} = 0$, passando para um problema com uma só função objetivo (rigidez) com constrangimentos de simetria. A variável v_i é o volume de cada elemento e e μ_{min} é um valor de densidade mínimo para evitar singularidades na matriz de rigidez global.

De modo a conferir rigidez à estrutura f_{stiff} , pode ser definida como a maximização do módulo de Compressibilidade, que representa a resistência à deformação volumétrica e que é uma propriedade utilizada frequentemente na otimização (Sigmund 2000). Assumindo uma simetria cúbica ou isotrópica, o módulo de Compressibilidade, em três dimensões, pode ser definido da seguinte maneira:

$$K = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} (E_{11} + E_{22} + E_{33}) + \frac{2}{3} (E_{12} + E_{13} + E_{23}) \right) \quad (2.16)$$

A função objetivo de rigidez elástica é dada então por

$$f_{stiff} = \frac{K^H}{K^*} \quad (2.17)$$

A função rigidez é normalizada de modo a garantir um maior controlo da ordem de grandeza na função objetivo. Para este caso, utilizou-se o valor máximo do módulo de Compressibilidade K^* obtido num processo de otimização em que se visa a maximização do mesmo.

A função de penalidade de simetria das constantes elásticas é formulada do seguinte modo

$$error_{stiff} = \frac{error_{stiff}^{cubic}}{error_{stiff}^{norm}} \quad (2.18)$$

onde $error_{stiff}^{norm}$ é o termo de normalização:

$$error_{stiff}^{norm} = (K^H)^2 \quad (2.19)$$

o termo $error_{stiff}^{cubic}$ corresponde à restrição das constantes elásticas independentes do tensor à simetria imposta (cúbica):

$$\begin{aligned}
error_{stiff}^{cubic} = & (E_{11}^H - E_{22}^H)^2 + (E_{22}^H - E_{33}^H)^2 + (E_{44}^H - E_{55}^H)^2 (E_{55}^H - E_{66}^H)^2 \\
& + (E_{12}^H - E_{13}^H)^2 + (E_{12}^H - E_{23}^H)^2 + \sum_{j=4}^6 \sum_{i=1}^{j-1} (E_{ij}^H)^2
\end{aligned} \quad (2.20)$$

A função $error_{stiff}$ de penalidade é normalizada de modo a conferir consistência quando são usados materiais com propriedades elásticas diferentes. Quando esta é usada como termo de penalidade na função objetivo, a normalização deve evitar que o tensor de elasticidade seja zero quando o peso associado à função erro w_{stiff} assume um valor elevado. Quanto à função objetivo da permeabilidade, visto que não se encontra nos objetivos da dissertação, esta não será demonstrada neste trabalho, podendo ser consultada em (Guest & Prevost 2006). Esta formulação tem como objetivo resolver problemas a três dimensões, no entanto nesta dissertação, os problemas de otimização foram formulados para a resolução em duas dimensões, pelo que se assiste a uma simplificação dos constrangimentos de simetria das constantes elásticas. Embora a simetria seja cúbica, é possível atingir a isotropia acrescentando os devidos constrangimentos de forma análoga.

As formulações anteriormente expostas apresentavam os constrangimentos de simetria como funções de penalidade à função objetivo, no entanto, em (Wilkins *et al.* 2007) é apresentada uma formulação de um problema com vista à maximização da condutividade e do módulo de Compressibilidade, de um material compósito de duas fases (sólido e vazio) em duas dimensões, com os constrangimentos de isotropia impostos nas restrições do problema. Na equação (2.21) encontram-se relações entre as componentes do tensor de elasticidade dadas por A_i , de modo a simplificar a escrita dos constrangimentos de isotropia nas equações seguintes.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}E_{1111}, & A_2 &= \frac{1}{2}E_{2222}, & A_3 &= 2E_{1212}, \\
A_4 &= \frac{1}{2}(E_{1111} + E_{2222} + 2E_{1122}), \\
A_5 &= \frac{1}{2}(E_{1111} + 2E_{1112} + 4E_{1212}), \\
A_6 &= \frac{1}{2}(E_{2222} + 2E_{1222} + 4E_{1212})
\end{aligned} \quad (2.21)$$

O tensor E_{ijkl} possui seis graus de liberdade, enquanto que E_{ijkl}^{iso} tem dois, o que significa que é necessário impor quatro restrições para alcançar a simetria isotrópica:

$$2A_1 + 2A_2 - A_3 - A_4 = 0 \quad (2.22)$$

$$A_1 - A_2 = 0 \quad (2.23)$$

$$A_1 + A_3 - A_5 = 0 \quad (2.24)$$

$$A_2 + A_3 - A_6 = 0 \quad (2.25)$$

O problema é então formulado através da maximização ou minimização de uma dada propriedade, como o módulo de Compressibilidade e a condutividade neste caso, sujeito a estas quatro restrições de simetria.

Em (Kang, Heesuk; Hollister 2007) é proposto um esquema de otimização para o *design* de microestruturas porosas em três dimensões. A rigidez e difusividade efetivas são calculadas usando o método a homogeneização e as microestruturas são geradas através da otimização topológica minimizando os erros entre as propriedades efetivas e as propriedades mecânicas alvo. A formulação é então a seguinte:

$$\min f = f_{tar} + f_{cub} + f_{pen} \quad (2.26a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \Phi_{lb} \leq \Phi \leq \Phi_{ub} \quad (2.26b)$$

$$D_{lb} \leq D_{jj}^{eff} \leq D_{ub} \quad (j = 1,2,3) \quad (2.26c)$$

$$0 < \mu_i \leq 1 \quad (2.26d)$$

Onde Φ representa a porosidade, Φ_{lb} e Φ_{ub} os seus limites inferior e superior, respetivamente. D_{lb} e D_{ub} são os limites inferior e superior dos coeficientes de difusão isotrópicos. D_{jj}^{eff} são as constantes de difusão efetivas da microestrutura desenvolvida. f_{tar} é o erro entre as constantes elásticas alvo e efetivas. A f_{cub} é a função erro de simetria cúbica e é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 f_{cub} = & \left(\frac{E_{2222}}{E_{1111}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{E_{3333}}{E_{2222}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{E_{1111}}{E_{3333}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{E_{2233}}{E_{1122}} - 1 \right)^2 \\
 & + \left(\frac{E_{1133}}{E_{2233}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{E_{1122}}{E_{1133}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{E_{5555}}{E_{4444}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{E_{6666}}{E_{5555}} - 1 \right)^2 \\
 & + \left(\frac{E_{4444}}{E_{6666}} - 1 \right)^2
 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Uma vez mais, a expressão descrita em (2.27) assegura somente a simetria cúbica, pelo que é necessário adicionar mais constrangimentos de forma análoga para atingir a isotropia.

Em (Guth et al. 2012) é apresentada uma formulação de maximização ou minimização de uma determinada propriedade, sujeita a restrições de isotropia em duas dimensões, como demonstrada de seguida:

$$\max \frac{F}{F^0}(\mu) \quad (2.28a)$$

$$s. a \quad V_{min} \leq V \leq V_{max} \quad (2.28b)$$

$$C_i(\mu) = 0, i = 1,4 \quad (2.28c)$$

Onde μ representa as variáveis de projeto; F representa a função objetivo ($F = E_{1111}(\mu) + E_{1122}(\mu)$); F^0 é o valor da função F na primeira iteração, de notar que este é um método de normalização da função objetivo; V_{min} e V_{max} representam os limites inferior e superior, respetivamente, do volume da célula; e C_i os constrangimentos de isotropia.

Estes são definidos da seguinte maneira:

$$C_1 = \frac{1}{2}(E_{1111} + E_{2222}) \quad (2.29)$$

$$C_2 = \frac{1}{8}((E_{1111} + E_{2222}) - 2(E_{1122} + 2E_{1212})) = 0 \quad (2.30)$$

$$C_3 = E_{1112} = 0 \quad (2.31)$$

$$C_4 = E_{2212} = 0 \quad (2.32)$$

2.2.4 Coeficiente de Poisson negativo

A maioria dos materiais encontrados na Natureza e utilizados na engenharia possuem o coeficiente de Poisson positivo, quer isto dizer que quando o material é sujeito à tração numa direção, este irá comprimir nas outras duas dimensões no espaço. Segundo (Cadman et al. 2013), para materiais isotrópicos em duas dimensões, é possível definir o coeficiente de Poisson da seguinte maneira:

$$\nu = \frac{C_{1122}}{C_{1111}} \quad (2.33)$$

Assim sendo, a formulação do problema pode ser definida como a minimização deste rácio entre estas duas componentes do tensor da elasticidade:

$$\min_{\mu} \nu(\mu) = \frac{C_{1122}^H(\mu)}{C_{1111}^H(\mu)} \quad (2.34)$$

Em (Andreassen et al. 2014) pretende-se a otimização do *design* de materiais auxéticos. A formulação, em três dimensões e considerando um material compósito de duas fases (sólido e vazio), utilizada para resolver o problema é a seguinte:

$$\min_{\mu} \nu^* \quad (2.35a)$$

$$s. a \quad K^* \geq aK \quad (2.35b)$$

$$\frac{\sum_{ij} (C_{ij}^{iso} - C_{ij}^*)^2}{(C_{11}^{iso})^2} \leq \varepsilon, \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (2.35c)$$

$$\frac{1}{Y} \sum_{i=1} (v_i \mu_i) \leq V, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.35e)$$

$$0 < \mu_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.35f)$$

Onde μ representa as densidades dos elementos, ν^* é o coeficiente de Poisson efetivo retirado do tensor de elasticidade homogeneizado. K^* é o módulo de Compressibilidade homogeneizado, K é o módulo de Compressibilidade da fase sólida, a é o rácio mínimo do módulo de Compressibilidade da fase sólida e de toda a microestrutura, C_{ij}^* e C_{ij}^{iso} são as entradas da matriz constitutiva homogeneizada e da matriz isotrópica correspondente, respetivamente, ε é um valor bastante pequeno

(10^{-5} por exemplo) que serve de tolerância ao constrangimento de isotropia. V é o volume da célula unitária, v_i é o volume de cada elemento finito da célula e μ_i a respetiva densidade. A restrição no módulo de Compressibilidade assegura um mínimo na rigidez da célula. A simetria de isotropia é definida da seguinte maneira:

$$c_{ii}^{iso} = \frac{c_{11}^* + c_{22}^* + c_{33}^*}{3}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.36)$$

$$c_{ij}^{iso} = \frac{c_{12}^* + c_{23}^* + c_{13}^*}{3}, \quad i, j = 1, 2, 3 \ i \neq j \quad (2.37)$$

$$c_{ii}^{iso} = \frac{c_{11}^{iso} - c_{22}^{iso}}{2}, \quad i = 4, 5, 6 \quad (2.38)$$

$$c_{ii}^{iso} = 0, \quad (2.39)$$

Onde C^* é a matriz constitutiva homogeneizada.

Em (Guth et al. 2012) é encontrado um método de normalização do coeficiente de Poisson na função objetivo, que resulta da divisão desta propriedade homogeneizada pelo seu respetivo valor da célula inicial:

$$\min: \frac{\frac{C_{1122}^H(\mu)}{C_{1111}^H(\mu)}}{\left(\frac{C_{1122}}{C_{1111}}\right)^0} \quad (2.40)$$

Ao passo que em (Guth et al. 2015), a normalização da função objetivo é definida da seguinte forma:

$$\min: \frac{E_{1122}^H(\mu)}{E_{1111}^H(\mu) + E_{1122}^H(\mu)} \times \frac{(E_{1111}^H(\mu) + E_{1122}^H(\mu))^0}{(E_{1122}^H(\mu))^0} \quad (2.41)$$

2.3 Aplicações de Materiais Compósitos

Face ao forte desenvolvimento tecnológico a que se tem assistido, surge a necessidade de impor alterações nos materiais tipicamente utilizados na engenharia de modo a satisfazer os requisitos necessários à inovação. Com isto, procedeu-se à combinação de diferentes tipos de materiais, com propriedades químicas e físicas distintas, de modo a criar um novo material com características únicas especializado para a função para o qual foi concebido. Este tipo de materiais, compostos por 2 ou mais constituintes (fases) são denominados de materiais compósitos.

Os materiais convencionais de engenharia são geralmente homogéneos e isotrópicos, enquanto que os materiais compósitos se definem como sendo anisotrópicos. Entende-se por materiais homogéneos aqueles cujas suas propriedades são independentes em qualquer posição do seu domínio. Um corpo é considerado isotrópico quando as propriedades num determinado ponto são iguais em todas as direções espaciais.

Os compósitos podem ser classificados quanto à sua matriz e reforço. O reforço é o componente que confere a resistência e rigidez à estrutura, enquanto a matriz é a fase contínua que envolve o reforço e tem como principal objetivo garantir a continuidade do conjunto transmitindo os esforços. Aplicando estas componentes do compósito ao estudo da presente dissertação, considera-se o reforço a fase sólida e a matriz a fase de vazio.

Na Natureza são encontrados materiais compósitos altamente eficientes nas suas funções, sendo um destes materiais a madeira, como referido em (Ashby 1991). A madeira possui uma microestrutura porosa onde o constituinte sólido é distribuído em células prismáticas. Desta forma, o material é movido a partir do eixo de flexão, tornando a madeira de uma árvore mais resistente à flexão que o próprio constituinte sólido que a compõe (Sigmund 1994). A microestrutura do osso humano é outro exemplo de um material compósito hierárquico natural. Um material é chamado de hierárquico, quando a sua microestrutura possui em si uma microestrutura. O osso humano é conhecido por ter propriedades elásticas extremas, isto é, encontram-se no limite do intervalo calculado por métodos analíticos. Evans (1990) refere a importância na necessidade de imitar o tecido ósseo o melhor possível, na realização de implantes de estruturas ósseas artificiais.

A otimização de propriedades elásticas de compósitos de microestrutura periódica permite a obtenção de materiais extremamente especializados para a função para o

qual foram projetados. Em seguida são dados alguns exemplos de estruturas que podem ser criadas através desta ferramenta.

2.3.1 Scaffolds

Um dos temas que mais interesse tem gerado no seio da engenharia (Wu et al. 2014), é a concepção de *scaffolds*, ou suportes biomiméticos. As lesões de acidentes, deformações ósseas ou do avanço da idade tem criado uma necessidade de implementar estruturas artificiais no local lesado do indivíduo. Tradicionalmente estes suportes porosos sintéticos são constituídos por metais, polímeros, materiais cerâmicos ou até compósitos de biomateriais, onde a microestrutura e propriedades das células naturais do tecido ósseo não são tidos em conta. A partir da otimização topológica (Hollister & Lin 2007) é possível ter em conta a biodegradabilidade, a estrutura e biologia da célula e as propriedades mecânicas do material. Atualmente, é possível gerar suportes biomiméticos com estruturas bastante complexas e com uma funcionalidade polivalente, como se pode observar na seguinte figura:

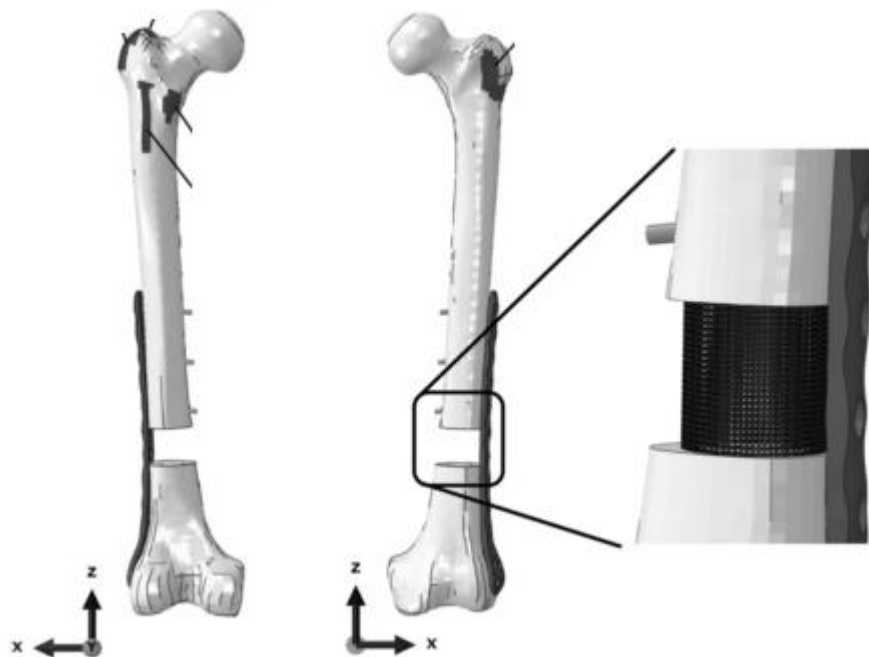


Figura 2.4 – Modelo finito do fêmur onde à direita se encontra o *scaffold* aplicado, adaptado de (Wieding et al. 2013)

2.3.2 Materiais Auxéticos

A existência de materiais auxéticos (coeficiente de Poisson negativo) tem sido questionado por cientistas e investigadores por um longo período de tempo, onde muitos livros existentes definem o coeficiente de Poisson no intervalo de $[0, 0.5[$. Contudo, estudos mais recentes verificam que em materiais isotrópicos o coeficiente pode ser até -1 . Ou seja, quando o coeficiente de Poisson é menor que zero, o material tem tendência a comprimir ou alongar numa direção, quando comprimido ou sujeito a tração, respetivamente, nas outras direções do espaço (2D ou 3D).

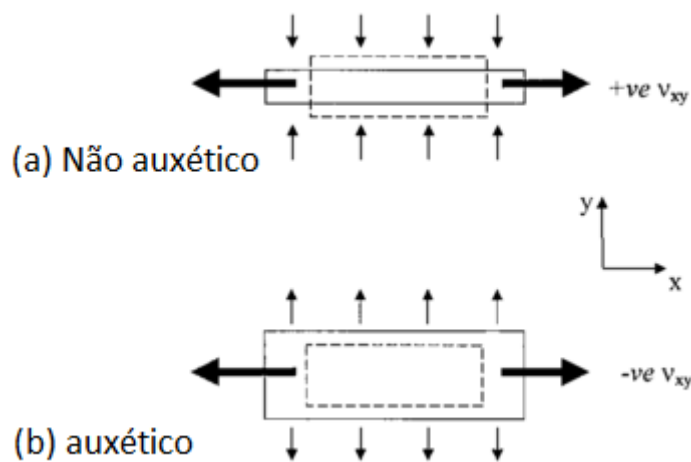


Figura 2.5 – Em a) está representada a deformação de um material não auxético, quando sujeito a uma tensão em x , este comprime na direção y . Em b) está representada a deformação de um material auxético, quando sujeito a uma tensão em x , este alonga na direção y . Adaptado de (Evans & Alderson 2000)

Em (Gibson; Ashby 1988) é sugerido que a estrutura *honeycomb* (favo de mel) invertida assume propriedades auxéticas, como representado na seguinte figura:

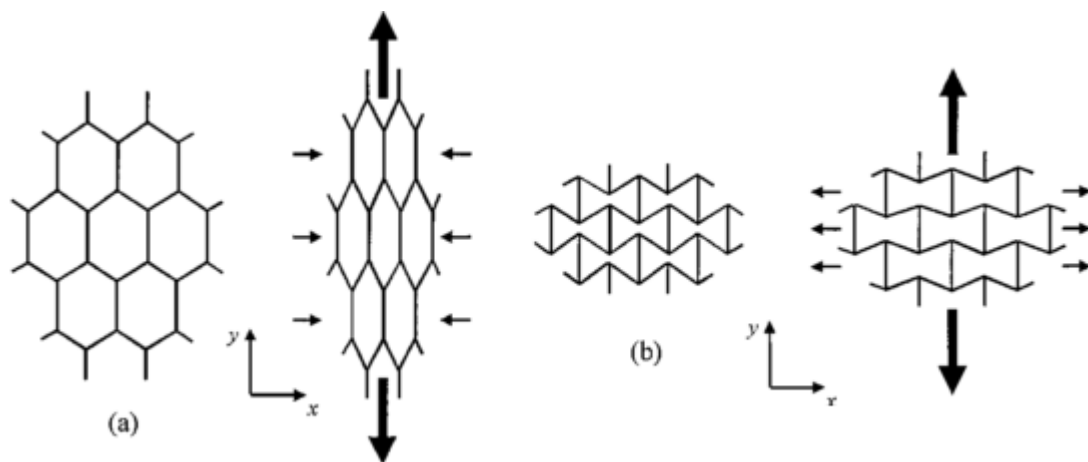


Figura 2.6 – Em a) está representada o favo de mel no seu estado normal e quando sujeito a uma tensão na direção y . Em b) está representado o favo de mel invertido indeformado e quando sujeito a uma tensão em y , comprimindo na horizontal, x . Adaptado de (Evans & Alderson 2000)

Existem dois tipos de procedimentos em prática para a obtenção deste tipo de materiais. O primeiro método foi introduzido por (Lakes 1987), este modifica as paredes de materiais porosos sujeitando-os a calor e compressão até atingirem valores do coeficiente de Poisson iguais ou inferiores a -0.7 . O segundo método é introduzido por (Caddock & Evans 1989), que obteve um material microporoso com coeficiente de Poisson negativo através da expansão do composto *polytetrafluoroethylene*. Na seguinte figura, é ilustrada um gráfico que relaciona os materiais auxéticos existentes, sintéticos e naturais, com o seu tamanho:

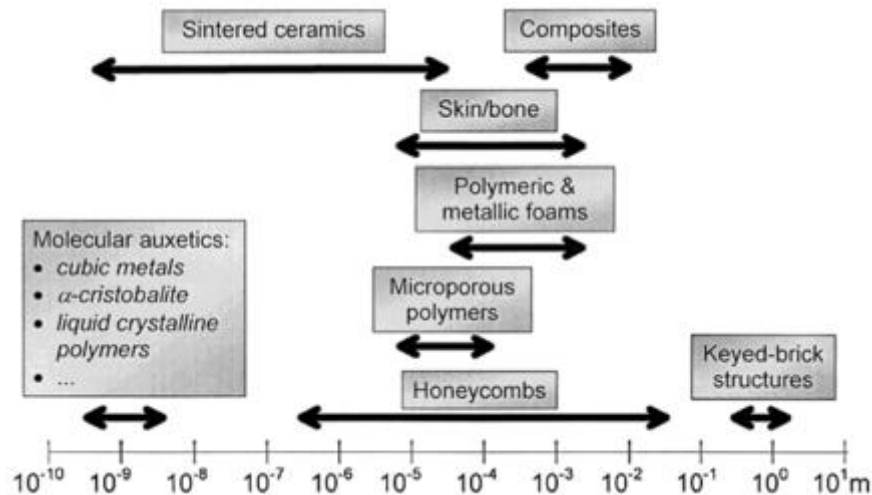


Figura 2.7 – Materiais auxéticos ao longo de várias escalas, adaptado de (Evans & Alderson 2000)

Os materiais auxéticos possuem uma vasta gama de aplicações e benefícios. O seu elevado módulo de Corte, capacidade de absorção de energia, resistência à fratura e chanfradura ou resposta acústica, constituem um conjunto bastante alargado de benefícios que este tipo de materiais proporcionam, permitindo a sua aplicação em variadas áreas, nomeadamente estruturas para absorção de choque, filtros de ar, elementos mecânicos como parafusos ou veículos terrestres (Cadman et al. 2013). De constatar a variação do módulo de Compressibilidade neste tipo de materiais. O módulo de Compressibilidade é definido pela seguinte expressão: $K = \frac{E}{3(1-\nu)}$, onde E é o módulo de young e ν o coeficiente de Poisson. Em materiais com coeficiente de Poisson negativo, o módulo de Compressibilidade, que se caracteriza pela resistência à variação de volume quando sujeito a pressões hidrostáticas, será menor tornando o material mais sensível a variações de volume. Este fator pode ser utilizado na produção de *hydrophones* (aparelho de captação de som debaixo de água).

2.3.3 Materiais com compressibilidade negativa ou nula

A compressibilidade é a medida da variação de volume de um corpo quando sujeito a uma variação de pressão. Normalmente, os materiais contraem-se em todas as direções quando a pressão aumenta. Contudo, existem alguns materiais com características especiais que expandem numa ou duas direções quando sujeitos a pressões hidrostáticas. Este fenómeno é denominado de compressibilidade negativa linear (NLC) e compressibilidade negativa de área (NAC), respetivamente.

Recentemente, este tipo de materiais começaram a ser alvo de interesse por parte da comunidade científica devido ao enorme potencial em variadas aplicações, nomeadamente em sensores de pressão, atuadores devido a diferenças de pressão ou cabos de telecomunicação óticos (Xie et al. 2014).

A nível molecular, foram encontrados alguns materiais com compressibilidade negativa linear, como o monohidrato de metanol (Fortes et al. 2011), *zinc dicyanourate* (Li et al. 2012). A nível micro e macro, são referenciados alguns cristais (Weng et al. 2008). Estes materiais podem conter características idênticas às dos materiais auxéticos, ou seja, podem ter o coeficiente de Poisson negativo, onde em (Grima et al. 2012) é estudada a relação entre os materiais auxéticos e os materiais NLC e NLA.

Na seguinte figura é representada uma microestrutura de um material com compressibilidade negativa linear e uma microestrutura de um material com compressibilidade negativa de área.

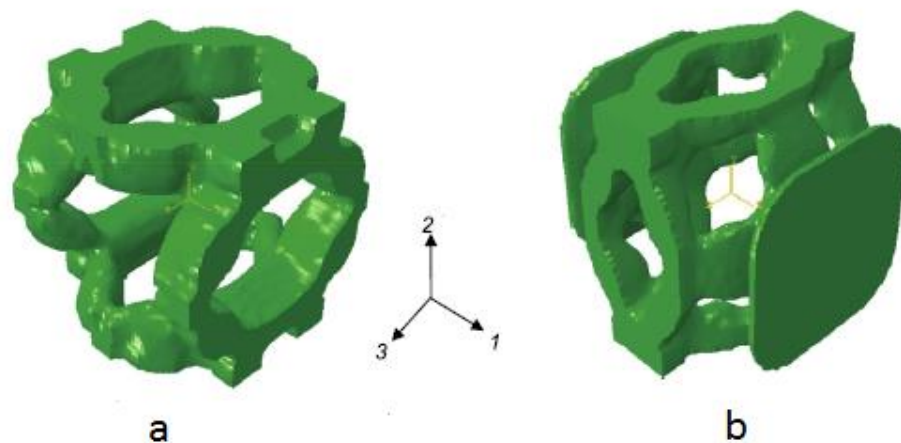


Figura 2.8 – a) Célula unitária NLC, b) célula unitária NAC, adaptado de (Xie et al. 2014)

3 Análise e otimização

3.1 Modelo de Material

O modelo de material utilizado é um material compósito poroso de duas fases (sólido e vazio), de microestrutura periódica, gerado através da repetição de uma célula base unitária. Na presente dissertação, é estudada a otimização e análise de compósitos de microestrutura periódica na escala microscópica, no plano yz (vertical y e horizontal z) e na direcção x (profundidade) considera-se o *design* constante. É frequente em problemas de otimização a utilização da escala microscópica e da escala macroscópica. A primeira tem como dimensão característica o comprimento d da célula base que ocupa o domínio Y unitário, ($|Y| = 1$), enquanto a segunda trata de dimensões que definem os limites exteriores ocupados pelo material, no entanto, nesta dissertação é só tido em conta o domínio microscópico. Na realização da análise de diferentes fatores que influenciam o processo de otimização topológica, nomeadamente os casos de carga, estratégias de filtragem e *design* inicial da célula; foram geradas e testadas diferentes malhas. Tomando (x, y, z) como as direcções espaciais, foram geradas malhas com $(1, 20, 20)$, $(1, 30, 30)$, $(1, 40, 40)$, $(1, 50, 50)$, isto é, 1 elemento finito na direcção x , e 20, 30, 40 e 50 elementos finitos na direcção y e z , possuindo cada uma delas 400, 900, 1600 e 2500 elementos finitos, respetivamente.

Perante os resultados, foi seleccionada a malha com $(1, 40, 40)$ elementos finitos para a realização do problema de otimização de diferentes constantes elásticas e propriedades de material, devido à boa definição dos limites de material e ao tempo de

computação bastante razoável. Para o caso da análise numérica dos efeitos de escala do coeficiente de Poisson, teve que se optar pela malha 30x30 devido à limitação do número de nós da versão do *software Ansys*.

As malhas foram geradas através de comandos de programação APDL, onde o tipo de elemento finito utilizado na modelação numérica é o *Solid45*, com 8 nós, onde cada um possui três graus de liberdade. Na figura 3.1 encontra-se uma representação da malha de elementos finitos

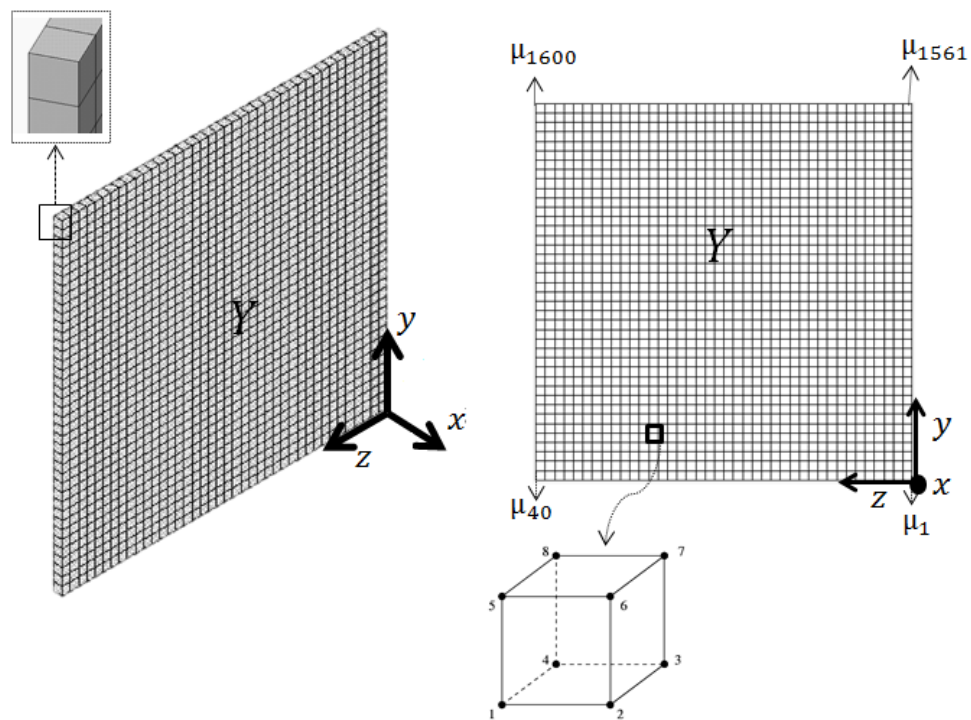


Figura 3.1 -À esquerda encontra-se a representação da malha de elementos finitos (40×40) na vista 3D, onde é possível constatar o único elemento de espessura na direção x . À direita encontra-se a malha vista no plano yz e o elemento finito de 8 nós.

3.2 Problema de otimização

Na presente dissertação, foram definidas diferentes funções custo com o objetivo de gerar diferentes microestruturas ótimas, nomeadamente a minimização da densidade de energia de tensão (*compliance*); a maximização de diferentes constantes elásticas do tensor de elasticidade, com e sem constrangimentos de simetria elástica; a maximização do módulo de Compressibilidade e módulo de rigidez;

e a minimização do coeficiente de Poisson. Em todas estes problemas estão presentes técnicas de otimização que permitem a convergência da solução ótima de forma eficiente, podendo o seguinte fluxograma representar o algoritmo generalizado da otimização topológica utilizado neste trabalho.

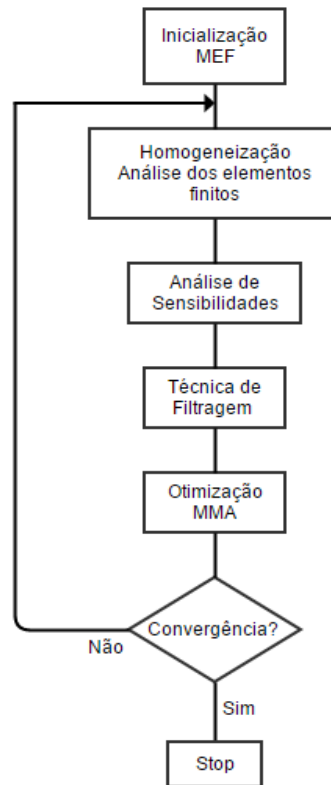


Figura 3.2 – Fluxograma do algoritmo de otimização topológica

3.2.1 *Design* Inicial

Em problemas de otimização estrutural, é comum utilizar uma distribuição de material uniforme como topologia inicial. Porém, em problemas de otimização topológica onde se recorre à técnica da homogeneização, uma célula inicial com distribuição uniforme de material não contém variações na microestrutura, o que consequentemente produz um gradiente nulo na energia elástica e correspondentes sensibilidades, impossibilitando o processo de otimização. Como tal, é necessária a implementação de uma célula inicial com uma distribuição de densidade não uniforme de modo a garantir a existência de gradientes.

3.2.2 SIMP

No projeto ótimo de material, tem-se em vista a melhor distribuição de densidades ρ possível para uma função objetivo. As variáveis de densidade são contínuas no intervalo de $]0,1]$, onde o valor $\rho = 0$ corresponde à ausência de material (região branca da microestrutura) e o valor $\rho = 1$ à presença de material (região preta da microestrutura). No entanto, como as variáveis são contínuas, podem aparecer regiões cinzentas, isto é, com os valores de densidade de material entre 0 e 1, o que se torna indesejável, não só por não possuírem qualquer significado físico, como também se pretende que a solução final seja constituída apenas por regiões pretas e brancas. Em (Bendsøe 1989) é proposto um método, denominado de *Solid Isotropic Material Penalization* (SIMP), que penaliza os valores de densidade intermédios (zonas cinzentas). Este método relaciona o tensor da elasticidade E_{ijkl} em cada ponto do domínio Ω da estrutura, com um tensor E_{ijkl}^0 de um material base isotrópico através de uma lei de potência que toma como argumento a função densidade $\rho(x)$ e expoente de penalização p , como se pode verificar na equação (3.1).

$$E_{ijkl} = \rho^p E_{ijkl}^0 \quad (3.1)$$

Nesta relação, um expoente $p > 1$ tem como função forçar as densidades intermédias $0 < \rho < 1$, a convergir para os valores $\rho = 1$ (presença de material) e $\rho = 0$ (ausência de material). Em problemas de otimização 2D e 3D com constrangimentos de volume, é necessário uma constante de penalização $p \geq 3$ para que a solução final seja formada por regiões em preto ($\rho = 1$) e regiões em branco ($\rho = 0$) (Bendsøe, M P, Sigmund 2003). Na figura 3.3 encontra-se a influência da constante de penalização p na otimização.

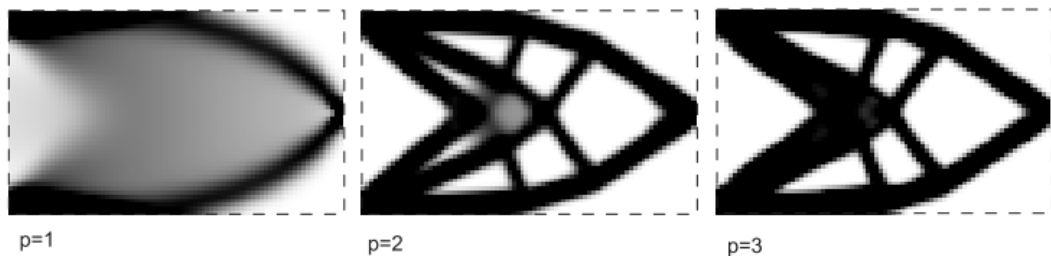


Figura 3.3 - Influência da penalização de densidades na otimização, adaptado de (Bendsøe & Sigmund 1999)

3.2.3 Homogeneização

Como já referido, as microestruturas de materiais compósitos possibilitam uma boa relação rigidez/massa, o que os torna bastante atrativos na indústria pelas variadas aplicações que estes podem ter, pelo que é imprescindível a realização de análises de tensão na estrutura para obter as propriedades do material da mesma. O estudo das tensões pode ser feito utilizando métodos analíticos ou numéricos. Os primeiros permitem uma resolução direta através de equações diferenciais, o que pode ser bastante complicado caso a geometria da estrutura seja complexa. Já os métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), viabiliza a análise de estruturas complexas através de simulações numéricas. No entanto, surgem duas contrariedades a este método, nomeadamente o facto de os materiais compósitos serem heterogéneos, isto é, quando são sujeitos a condições de fronteira de tensão ou deformação, cada ponto do material reage de acordo com as suas propriedades elásticas; e a qualidade e precisão dos resultados, nos métodos numéricos, são proporcionais ao refinamento da malha utilizada (um maior número de elementos finitos por célula unitária permite uma maior definição da microestrutura). Estes dois fatores combinados impossibilitam o estudo das propriedades mecânicas do material compósito com geometrias complexas dado o enorme custo computacional exigido.

Desta forma, de modo a superar estas dificuldades é recorrente a utilização do método da Homogeneização. Esta metodologia tem como por objetivo transformar um meio heterogéneo num meio homogéneo com as propriedades mecânicas equivalentes. A figura 3.4 permite observar de forma esquemática a passagem de um corpo ψ^ε heterogéneo de microestrutura periódica com propriedades elásticas E_{ijkl}^ε para um corpo homogéneo ψ de propriedades elásticas E_{ijkl}^H .

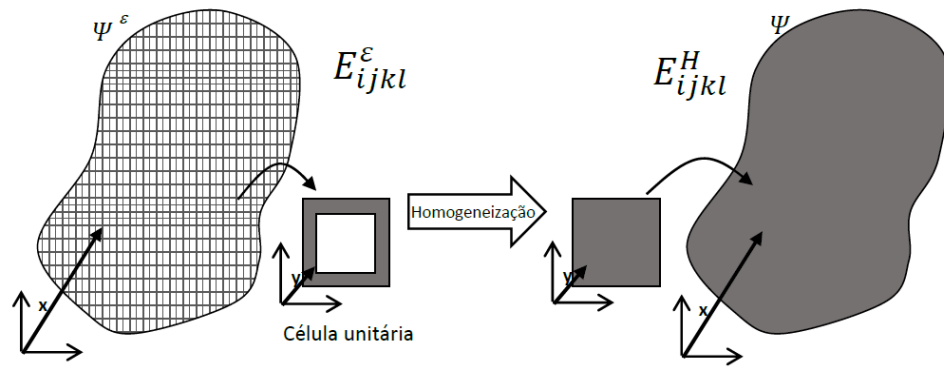


Figura 3.4 – Representação esquemática do processo de homogeneização, à esquerda encontra-se a célula heterogênea, e à direita a respetiva célula equivalente com propriedades homogeneizadas, adaptado de (Amiano 2015)

Na presente dissertação, é aplicada a teoria da homogeneização em meios periódicos, sendo que, como se trata de um método de simplificação, existe um erro associado entre o material homogeneizado e o compósito heterogêneo. Assim torna-se importante perceber de que forma o problema real (compósito heterogêneo) se aproxima das hipóteses assumidas pela teoria da homogeneização. Uma das hipóteses é a célula base unitária, isto é, tem-se uma célula base unitária com dimensão característica d infinitesimal quando comparada com a dimensão característica D de domínio macroscópico, tal que $\frac{d}{D} \rightarrow 0$ (Guedes & Kikuchi 1990). Na figura 3.5 encontra-se uma representação da periodicidade infinita no domínio microscópico no espaço e em duas dimensões.

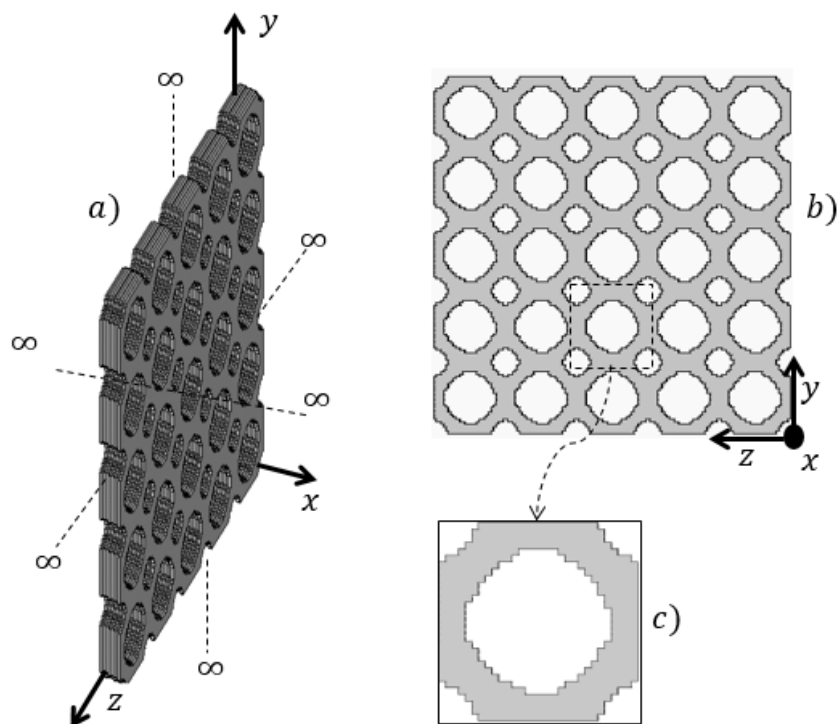


Figura 3.5 -Em a) encontra-se a representação da periodicidade infinita no domínio microscópico em 3D, em b) a mesma representação no plano yz , e em c) a célula unitária.

Uma outra hipótese assume a existência de uma periodicidade infinita no domínio microscópico e no domínio macroscópico, de maneira a que qualquer propriedade do corpo ψ física ou geométrica é periódica se se verificar a seguinte condição:

$$\mathbf{x} \in \Omega \text{ e } (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in \Omega \Rightarrow \psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \psi(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

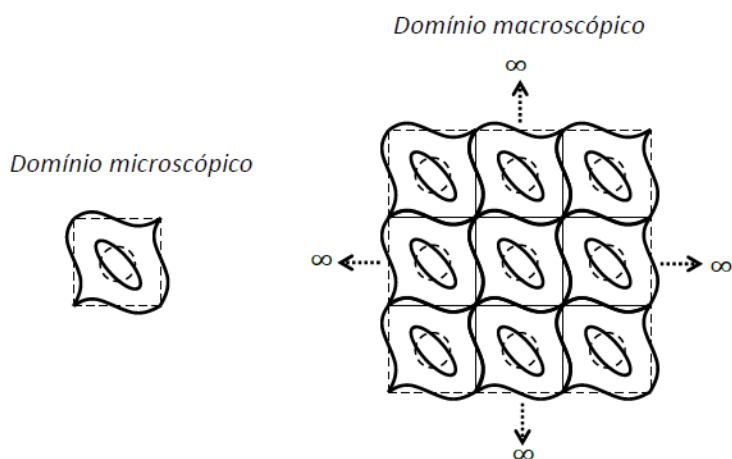


Figura 3.6 – Representação esquemática das condições de periodicidade nos domínios microscópicos e macroscópicos, adaptado de (Amiano 2015).

A equação que permite o cálculo das propriedades elásticas homogeneizadas é a seguinte:

$$E_{ijk}^H = \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} E_{pqrs} \left(\delta_{rk} \delta_{sm} - \frac{\partial \chi_r^{km}}{\partial y_s} \right) \left(\delta_{pi} \delta_{qj} - \frac{\partial \chi_p^{ij}}{\partial y_q} \right) dY \quad (3.3)$$

Onde $|Y|$ representa o volume do domínio da célula base, E_{pqrs} o tensor das propriedades elásticas calculadas pelo método SIMP, δ é o delta de Kronecker e χ^{km} as deformações características da célula quando submetidas a seis estados de tensão de teste unitário $e_{rs}^{0(km)}$ e são calculadas através da seguinte expressão:

$$\int_{\mathbb{Y}} E_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{km}}{\partial y_s} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_{\mathbb{Y}} E_{ijrs} e_{rs}^{0(km)} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\mathbb{Y}} \quad (3.4)$$

3.2.4 Análise de Sensibilidades

Atendendo à Natureza iterativa dos processos de otimização, ao número de variáveis de projeto, à facilidade ou não de obtenção eficiente dos valores da função objetivo, torna-se essencial o cálculo das sensibilidades nos algoritmos de otimização. Existem dois métodos diferentes de cálculo das sensibilidades: métodos numéricos e métodos analíticos. Um método numérico utilizado com frequência devido à sua fácil implementação, é o método das diferenças finitas, mas apesar disso produz resultados não muito precisos e requer uma enorme capacidade de computação, visto que é necessário calcular a sensibilidade de cada variável de projeto. Por sua vez, os métodos analíticos permitem alcançar valores exatos das sensibilidades, no entanto o seu desenvolvimento e implementação no programa podem ser bastante complicados. Outro problema inerente a este cálculo é que por vezes pode convergir para um mínimo local não global. Quer isto dizer que o valor ótimo encontrado corresponde ao melhor numa determinada vizinhança da solução corrente, pelo que o valor ótimo depende do ponto do espaço de projeto donde iniciou o processo iterativo, isto é, depende da célula inicial. Nesta dissertação são utilizados o método das diferenças finitas e o cálculo analítico dos gradientes da função objetivo e constrangimentos. Seguidamente é apresentada uma explicação sobre os dois métodos utilizados no cálculo das sensibilidades, sendo que o método analítico é predominante nas diferentes otimizações.

3.2.4.1 Método das diferenças finitas

Quando as funções objetivo ou de constrangimento são complexas, é recorrente a utilização deste método ainda que tenha um custo computacional elevado. Este tem como objetivo aproximar o gradiente da função através das diferenças finitas. Assumindo que as funções são contínuas e diferenciáveis, a derivada parcial de uma função de n variáveis em relação à variável de projeto x_i pode ser definida da seguinte maneira:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, x_n)}{\delta x_i} \quad (3.5)$$

onde δx_i é uma pequena perturbação de uma variável x_i . Utilizando a definição de derivada parcial é possível aproximar numericamente o gradiente de uma função num dado ponto. Assim surgem três abordagens possíveis a partir da expressão anteriormente apresentada:

a) Diferenças finitas progressivas (*forward*)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \cong \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, x_n)}{\Delta x_i} \quad (3.6)$$

b) Diferenças finitas retroativas (*backward*)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \cong \frac{f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i - \Delta x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (3.7)$$

c) Diferenças finitas centrais (*central*)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \cong \frac{f\left(x_1, \dots, x_i + \frac{1}{2}\Delta x_i, \dots, x_n\right) - f\left(x_1, \dots, x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i, \dots, x_n\right)}{\Delta x_i} \quad (3.8)$$

Em todas as expressões apresentadas δx_i é substituído por uma diferença finita Δx_i para obter o valor aproximado da derivada. O gradiente é aproximado através da diferença dos valores da função de dois pontos finitos a dividir pela variação Δx_i (usualmente $\Delta x_i = 0.01$) (Coelho & Cardoso 2012).

3.2.4.2 Cálculo analítico do gradiente

Neste método, é possível obter resultados exatos em intervalos de tempos de computação razoáveis. No entanto, perante funções objetivo ou de constrangimento complexas, o cálculo analítico das derivadas das funções pode tornar-se bastante

complicado ou até impossível. No capítulo 4 serão apresentados os cálculos dos gradientes das respectivas funções objetivo e de constrangimento.

3.2.5 Checkerboard

Aplicando a otimização topológica em diferentes tipos de problemas *design* de material, é comum encontrar regiões alternadas entre o sólido e vazio, preto e branco respectivamente, denominados de *checkerboard* (padrão de xadrez), que se pode verificar na seguinte figura:

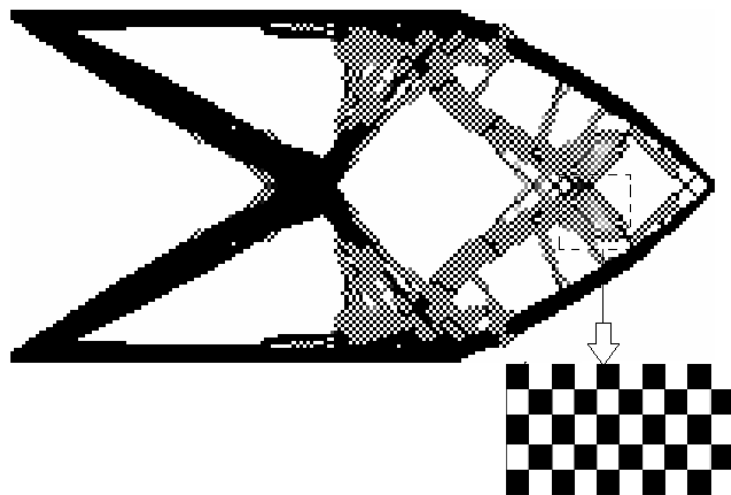


Figura 3.7 – Problema de otimização com aparecimento de *checkerboard*.

Em (Díaz & Sigmund 1995) conclui-se que regiões do material com padrões de *checkerboard* possuem elementos de densidade artificial muito altos (mais altos que os limites teóricos), e que este fenômeno pode acontecer devido a uma modelação numérica fraca, isto é, uma discretização da malha com elementos finitos de baixa ordem, ainda que seja também comum o aparecimento deste padrão em elementos finitos de alta ordem (9 elementos). Este acontecimento é indesejável no processo de otimização, pois torna impossível a obtenção da solução ótima real.

Outro problema relacionado com a discretização dos elementos finitos é a dependência da malha. Este fenômeno deve-se à obtenção de diferentes resultados em diferentes malhas, para o mesmo problema de otimização. Refinando mais a malha de elementos finitos, ou seja, aumentando o número destes por célula (ver

figura 3.8). No entanto, com este aumento do número de elementos finitos e da consequente definição dos resultados, o problema de otimização pode tornar-se impraticável devido ao tempo de computação.

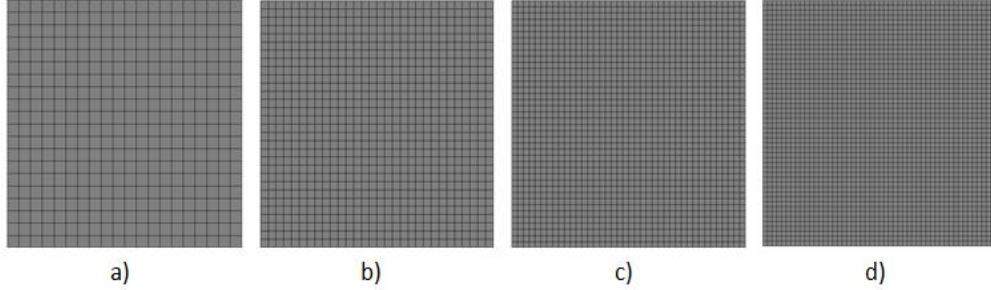


Figura 3.8 – Representação de diferentes discretizações da malha. Em a) tem-se 20x20 elementos, em b) 30x30 elementos, em c) 40x40 elementos e em d) 50x50 elementos

Com o intuito de evitar estas dificuldades, são introduzidas técnicas de filtragem de densidades no algoritmo. Existem duas técnicas de filtragem mais conhecidas, o filtro de sensibilidades (Sigmund & Petersson 1998) e o filtro das variáveis de projeto (Bruns & Tortorelli 2001). Na presente dissertação é utilizada a técnica de filtragem das sensibilidades. Esta toma um elemento k e modifica a sua sensibilidade baseando-se na média ponderada das sensibilidades dos elementos da sua vizinhança fixa, como se verifica na seguinte expressão:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial p_k} = \frac{1}{pk \sum_{i=1}^N \hat{H}_l} \sum_{i=1}^N \hat{H}_l \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \quad (3.9)$$

onde f é a função objetivo ou de constrangimento, N é o número de elementos total que compõem a malha, \hat{H}_l é o operador de convolução de independência de malha (fator de peso) e é escrito através da seguinte maneira:

$$\hat{H}_l = \frac{r_{min} - dist(k, i)}{r_{min}}, \quad \{i \in N \mid dist(k, i) \leq r_{min}\}, k = 1, \dots, N \quad (3.10)$$

onde o operador $dist(k, i)$ é definido como a distância entre o centro do elemento k e o centro do elemento i . O operador \hat{H}_l diminui à medida que se afasta do centro de k em direção ao centro de i , tornando-se zero quando $dist(k, i) > r_{min}$ (ver figura 3.9).

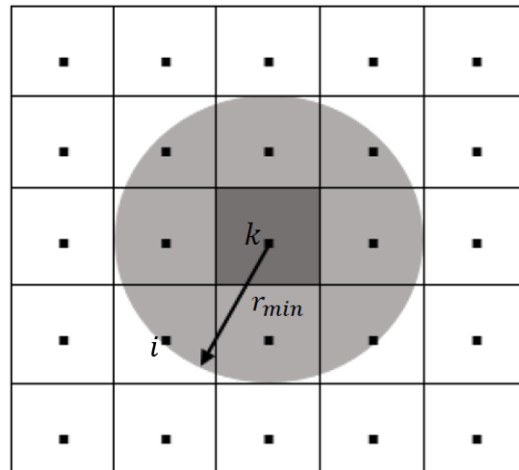


Figura 3.9 – Representação da vizinhança do elemento k com o r_{min} até ao elemento i

Na figura 3.10 encontra-se ilustrada a influência do uso do filtro de sensibilidades no problema de otimização topológica.

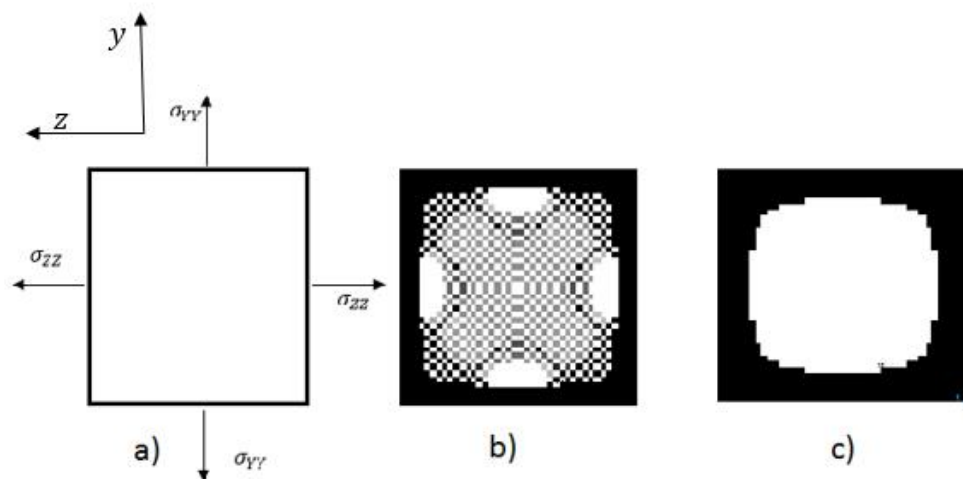


Figura 3.10 -Em a) encontra-se o estado de carga a que a microestrutura foi sujeita, em b) está ilustrado o resultado de uma otimização com o filtro de sensibilidades desligado, apresentando o padrão de xadrez, em c) está ilustrada a topologia ótima para o caso de carga, tendo sido utilizado o filtro de sensibilidades.

3.2.6 Método das Assíntotas Móveis

O método das assíntotas móveis (MMA – *Method of moving Asymptotes*), proposto por (Svanberg 1987), surge como uma generalização de um método de otimização denominado de CONLIN (Convex Linearization) (Fleury & Braibant 1986) e é utilizado em problemas de otimização com um elevado número de variáveis de

projeto, permitindo a sua resolução num intervalo de tempo curto em relação a outros métodos de otimização. A partir da informação obtida através dos valores da função objetivo e constrangimentos, e respetivos gradientes, avaliados num determinado ponto pertencente ao domínio de projeto, o MMA substitui o problema inicial P (equação 3.11) em diferentes subproblemas P' . A sucessão de subproblemas que o MMA gera e resolve para os correspondentes pontos no domínio de projeto converge para a solução do problema original.

$$\begin{aligned} P: \min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) \\ x_j^- \leq x_j \leq x_j^+; \quad j = 1, \dots, n \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0; \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde n corresponde ao número de variáveis de projeto e m ao número de constrangimentos. Este método tem como principais características a existência de convexidade, que garante a existência de soluções nos subproblemas; e a separabilidade, onde cada função de aproximação f_i' resulta da soma de funções f_j'' e cada f_j'' possui a sua variável de projeto correspondente x_j (Coelho 2009).

O MMA possui duas assíntotas, inferior $L_i^{(k)}$ e superior $U_i^{(k)}$, que delimitam o intervalo de solução, sendo atualizadas a cada iteração de modo a diminuir a oscilação dos resultados ou a acelerar a convergência para a solução ótima.

Desta forma, uma variável de projeto numa determinada iteração $\mathbf{x}^{(k)}$, a formulação do subproblema pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\min F_0(\mathbf{x}) \approx F(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^k}{U_i^k - x_i} + \frac{q_i^k}{x_i - L_i^k} \right) \quad (3.12)$$

$$\text{s. a } f_j^k(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{ji}^k}{U_i^k - x_i} + \frac{q_{ji}^k}{x_i - L_i^k} \right) \leq \hat{f}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.13)$$

$$\max\{x_i^-, \alpha_i^k\} \leq x_i \leq \min\{x_i^+, \beta_i^k\} \quad (3.14)$$

onde os parâmetros p_i^k e q_i^k são definidos por:

$$p_{ji}^k = \begin{cases} (U_i^k - x_i^k)^2 \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, & \text{se } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} > 0 \\ 0, & \text{se } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \leq 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$q_{ji}^k = \begin{cases} 0, & \text{se } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \geq 0 \\ -(x_i^k - L_i^k)^2 \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, & \text{se } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} < 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Os parâmetros α_i^k e β_i^k surgem somente como valores escolhidos de modo a evitar divisões por zero durante a resolução do subproblema:

$$L_i^k < \alpha_i^k < x_i^k < \beta_i^k < U_i^k \quad (3.17)$$

Na presente dissertação é utilizado também o CONLIN como caso particular do MMA, nos problemas de minimização da *compliance* com estrangimentos de volume. Esta utilização é bastante eficiente, pois neste tipo de problemas o método CONLIN aproxima a função objetivo por uma aproximação convexa, e aproxima de forma exata a função de volume devido à sua linearidade.

3.3 Tensores Constitutivos

Em casos de estado de tensão em três dimensões, o tensor da rigidez e da flexibilidade, contêm cada um deles 81 constantes de elasticidade, necessárias para ligar os tensores de segunda ordem da tensão e da deformação. A lei de Hooke na forma matricial e a deformação em função da tensão (Lei de Hooke invertida) estão descritas nas seguintes equações, respetivamente:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.19)$$

Onde σ_{ij} e σ_{kl} são as componentes da tensão aplicadas num elemento cúbico de três dimensões de coordenadas (x, y, z) (ver figura 3.11), E_{ijkl} representa o tensor da rigidez, C_{ijkl} o tensor da flexibilidade e ε_{ij} e ε_{kl} as componentes da deformação.

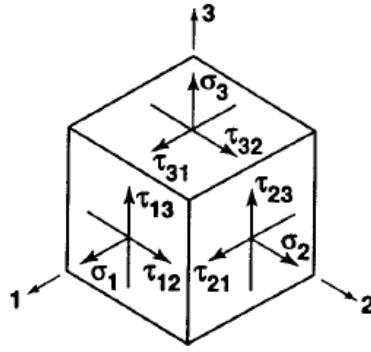


Figura 3.11 – Tensões num elemento, adaptado de (Jones 1999)

Contudo, os tensores da tensão e da deformação são simétricos, havendo a seguinte relação:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (3.20)$$

O que reduz o número de constantes elásticas independentes de 81 para 36, e assim sendo, os tensores da rigidez e da flexibilidade apresentam também simetria:

$$E_{ij} = E_{ji} \quad C_{ij} = C_{ji} \quad (3.21)$$

Logo, o número de constantes elásticas independentes de um material anisotrópico em três dimensões pode ser reduzido a 21, isto é:

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij} \quad (3.22)$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (3.23)$$

Ao escrever a lei de Hooke (ver equação 3.18) na forma matricial de um material anisotrópico, é frequente utilizar a notação de Voigt-Kelvin, já referida no capítulo 2, podendo escrever os índices dos tensores, como apresentados na tabela 3.1.

As deformações são definidas do seguinte modo:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.24)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.25)$$

Em que u, v e w são deslocamentos na direção x, y e z , respetivamente. Assim a distorção γ_{ij} (ver figura 3.12) pode ser representada através de:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} = 2\varepsilon_{ij} \text{ para } i \neq j \quad (3.26)$$

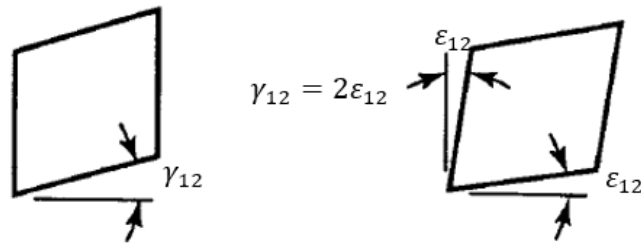


Figura 3.12 -Relação entre γ_{ij} e ε_{ij}

Tabela 3.1 – Tensores da tensão e deformação e respectivas notações contraídas

Tensão		Deformação	
Tensor	Notação Contraída	Tensor	Notação Contraída
σ_{11}	σ_1	ε_{11}	ε_1
σ_{22}	σ_2	ε_{22}	ε_2
σ_{33}	σ_3	ε_{33}	ε_3
τ_{23}	σ_4	$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$	ε_4
τ_{31}	σ_5	$\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$	ε_5
τ_{12}	σ_6	$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$	ε_6

Finalmente, podemos escrever a lei de Hooke sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1123} & E_{1131} & E_{1112} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2223} & E_{2231} & E_{2212} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3323} & E_{3331} & E_{3312} \\ E_{2311} & E_{2322} & E_{2333} & E_{2323} & E_{2331} & E_{2312} \\ E_{3111} & E_{3122} & E_{3133} & E_{3123} & E_{3131} & E_{3112} \\ E_{1211} & E_{1222} & E_{1233} & E_{1223} & E_{1231} & E_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

E a respetiva lei de Hooke invertida:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 2C_{1123} & 2C_{1131} & 2C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 2C_{2223} & 2C_{2231} & 2C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 2C_{3323} & 2C_{3331} & 2C_{3312} \\ 2C_{2311} & 2C_{2322} & 2C_{2333} & 4C_{2323} & 4C_{2331} & 4C_{2312} \\ 2C_{3111} & 2C_{3122} & 2C_{3133} & 4C_{3123} & 4C_{3131} & 4C_{3112} \\ 2C_{1211} & 2C_{1222} & 2C_{1233} & 4C_{1223} & 4C_{1231} & 4C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Onde os factores multiplicativos 2 e 4 surgem devido à relação da distorção referida na equação (3.26) e também das simetrias do tensor nas equações (3.22) e (3.23).

3.3.1 Simetrias do tensor

Os tensores possuem diferentes níveis de anisotropia, pelo que podem ser classificados consoante os planos de simetria que apresentam. Em (Chadwick et al. 2001) é provada a existência de exactamente 8 tipos de simetria do tensor elástico (ver figura 3.13).

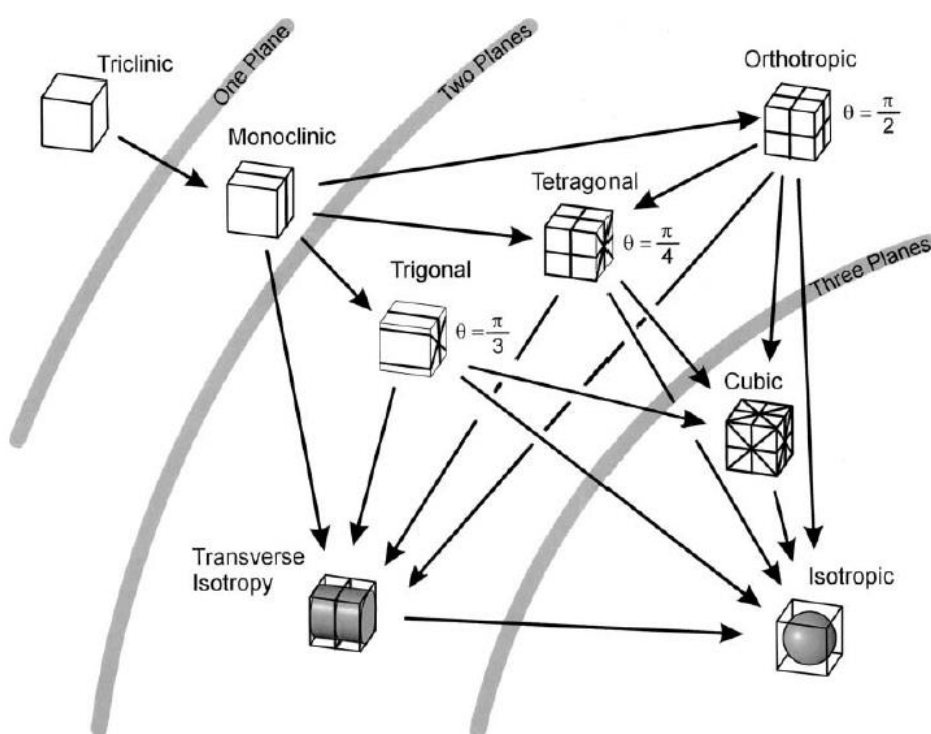


Figura 3.13 – Representação dos oito tipos de simetria elástica e respetivos planos de simetria que as definem, adaptado de (Chadwick et al. 2001)

Com o aumento da simetria do tensor de elasticidade, o número de constantes elásticas independentes do tensor elástico diminui, apresentando-se de seguida uma explicação dos diferentes tipos de simetria e respetivos tensores elásticos, desde o tensor mais anisotrópico (Triclínica), até ao tensor isotrópico.

3.3.1.1 *Triclínica*

O estado triclínico trata do caso máximo de anisotropia (o material anisotrópico apresenta diferentes propriedades do material em diferentes direções do seu domínio), pois não existe nenhum plano de simetria para as propriedades do material, tendo o tensor elástico 21 constantes elásticas independentes.

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{14} & E_{24} & E_{34} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{15} & E_{25} & E_{35} & E_{45} & E_{55} & E_{56} \\ E_{16} & E_{26} & E_{36} & E_{46} & E_{56} & E_{66} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

3.3.1.2 *Monoclínica*

Quando existe um plano de simetria, o tensor elástico pode ser reduzido a 13 constantes elásticas. Tomando o plano $z = 0$, o tensor pode ser escrito da seguinte maneira:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & E_{26} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & 0 & 0 & E_{36} \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & E_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{45} & E_{55} & 0 \\ E_{16} & E_{26} & E_{36} & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

3.3.1.3 *Ortotrópica*

No caso de existir dois planos ortogonais de simetria nas propriedades do material, haverá consequentemente o terceiro plano ortogonal de simetria. Assim, o tensor pode ser escrito da seguinte maneira, possuindo nove constantes elásticas independentes:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

3.3.1.4 *Trigonal*

Neste tipo de simetria, à semelhança da simetria ortotrópica, existem três planos de simetria, no entanto, estes não são ortogonais entre si, existindo seis constantes elásticas independentes.

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{13} & -E_{14} & 0 & 0 \\ E_{13} & E_{13} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ E_{14} & -E_{14} & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} & E_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{14} & \frac{1}{2}(E_{11} - E_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

3.3.1.5 *Tetragonal*

Esta simetria possui cinco planos de simetria e seis constantes elásticas distintas, podendo ser escrito da seguinte maneira:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{13} & E_{13} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

3.3.1.6 *Transversalmente isotrópica*

Esta simetria representa um caso especial de simetria ortotrópica, onde o material possui as mesmas propriedades num plano, isto é, é isotrópico nesse determinado plano, e contém diferentes propriedades na direção perpendicular a este. Na presente dissertação, apesar de se trabalhar sobre uma malha com duas direções (y e z), e as propriedades do material serem otimizadas somente neste plano, esta possui espessura na direção x , pelo que imposição de simetria transversalmente isotrópica é o caso mais isotrópico obtido neste trabalho. O aspeto do tensor, com cinco constantes elásticas distintas, neste caso é o seguinte:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{13} & E_{13} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(E_{11} - E_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

3.3.1.7 Simetria Cúbica

Neste tipo de simetria, as propriedades elásticas do material possuem 9 planos de simetria, sendo o tensor definido por três constantes elásticas independentes.

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{12} & E_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

3.3.1.8 Isotrópica

O material isotrópico é caracterizado por possuir as propriedades do material independentes em qualquer direção do espaço, pelo que existe uma infinidade de planos de simetria. Neste tipo de materiais, são necessárias apenas duas constantes elásticas independentes para formar o tensor.

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{12} & E_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(E_{11} - E_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(E_{11} - E_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(E_{11} - E_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Para este caso específico, a lei de Hooke generalizada pode ser escrita como a combinação linear de dois tensores:

$$\sigma_{ij} = 3K \left(\frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) + 2G \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3.37)$$

Onde K representa o módulo de Compressibilidade, G é o módulo de Corte e δ_{ij} o delta de Kronecker. Para casos de isotropia, o módulo de Compressibilidade e o módulo de Corte podem ser escritos da seguinte maneira:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.38)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.39)$$

Em que E representa o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson. Outra maneira de exprimir a lei de Hooke é através das constantes de Lamé, como apresentado na seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \delta_{ij} \quad (3.40)$$

Onde λ e μ representam as constantes de Lamé, e podem ser expressas do seguinte modo:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.41)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G \quad (3.42)$$

Desta forma, a lei de hooke pode ser escrita em função das constantes de Lamé:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

A lei de Hooke pode também ser expressa em função do coeficiente de Poisson:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

E sob a forma da flexibilidade:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

3.3.2 Medida de Anisotropia

Com as análises ao problema da minimização da compliance e à aplicação de simetrias no tensor em problemas de maximização de constantes elásticas, torna-se interessante medir o nível de anisotropia do material ótimo obtido. Em (Challis et al. 2008), é apresentado um método para o cálculo deste parâmetro, que consiste em medir a “distância” entre o tensor elástico calculado E_{ijkl} e o tensor elástico isotrópico mais próximo E_{ijkl}^{iso} :

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{(E_{ijkl} - E_{ijkl}^{iso})(E_{ijkl} - E_{ijkl}^{iso})}{E_{ijkl} E_{ijkl}^{iso}}} \quad (3.46)$$

O tensor isotrópico é definido a partir dos invariantes do tensor da elasticidade E_{ijkl} , K (módulo de Compressibilidade) e G (módulo de Corte), sendo definidos através das seguintes expressões:

$$K = \frac{1}{9} E_{iijj} \quad (3.47)$$

$$G = \frac{1}{20} (E_{ijij} + E_{ijji}) - \frac{1}{30} E_{ijij} \quad (3.48)$$

De considerar que estas expressões são designadas para casos de estudo em três dimensões.

3.4 Energia elástica

Em problemas de minimização da flexibilidade, ou da *compliance*, tem-se como função objetivo a minimização da densidade de energia de tensão.

Para todos os materiais elásticos, o incremento de trabalho por unidade de volume é dado pela seguinte expressão:

$$dW = \sigma_i d\varepsilon_i \quad (3.49)$$

Onde as tensões σ_i atuam segundo as deformações $d\varepsilon_i$. Contudo, através das relações de tensão-deformação da equação (3.18) tem-se:

$$dW = E_{ij} \varepsilon_j d\varepsilon_i \quad (3.50)$$

Integrando todas as deformações, tem-se o trabalho por unidade de volume, ou a densidade de energia de deformação:

$$W = \frac{1}{2} E_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (3.51)$$

Analogamente, também se pode escrever a energia de deformação através do tensor da flexibilidade e à base da tensão imposta. Sabendo que:

$$\varepsilon = C \sigma \quad (3.52)$$

E através da lei de Hooke da equação (3.18), tem-se:

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (3.53)$$

3.5 Propriedades elásticas

Nesta secção será dada uma explicação mais física sobre as diferentes propriedades elásticas que são otimizadas no âmbito desta tese, nomeadamente:

- Módulo de Young;
- Módulo de Corte;
- Módulo de Compressibilidade;
- Coeficiente de Poisson

Na otimização destas propriedades elásticas, considera-se o material como tendo uniformidade ao longo da direção x ou 1.

O módulo de Young E representa o módulo de elasticidade do material. Considerando um material isotrópico, quando é sujeito a uma tensão uniaxial σ_{11} , pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Onde o módulo de elasticidade representa o rácio entre a tensão numa direcção aplicada e a deformação na respetiva direcção.

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \quad (3.55)$$

O módulo de corte G , em duas dimensões, pode ser escrito da seguinte maneira:

$$G = E_{1212} \quad (3.56)$$

Em materiais isotrópicos, representa o rácio entre, por exemplo, a tensão de corte τ_{12} e a deformação ε_{12} :

$$G = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{\tau_{12}}{2\varepsilon_{12}} \quad (3.57)$$

Este é também equivalente à segunda constante de Lamé conforme explicitado na equação (3.42).

O módulo de compressibilidade, K , representa a capacidade de resistência de um material à variação de volume quando sujeito a uma tensão hidrostática. De um modo geral, para duas dimensões, esta propriedade pode ser definida do seguinte modo:

$$K = \frac{1}{4} E_{iijj} \quad (3.58)$$

Realizando a expansão dos índices ij tem-se:

$$K = \frac{1}{4} (E_{1111} + E_{2222} + E_{1122} + E_{2211}) \quad (3.59)$$

Devido à simetria do tensor da elasticidade:

$$K = \frac{1}{4} (E_{1111} + E_{2222} + 2E_{1122}) \quad (3.60)$$

O coeficiente de Poisson, considerando um caso de tensão uniaxial σ_{11} num material isotrópico, tem como definição o rácio entre a extensão (ε_{22}) numa direcção (22), perpendicular a (11), e a extensão (ε_{11}) na direcção da aplicação da carga σ_{11} .

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad (3.61)$$

Em materiais convencionais, quando sujeitos à compressão numa direção, comprimem nessa direção e alongam na direção oposta, pelo que os sinais da deformação são contrários obtendo-se no final um resultado negativo. O sinal negativo antes do quociente tem como objetivo expressar o coeficiente de Poisson como um número positivo. Desta forma, quando estas duas deformações têm o mesmo sinal, o coeficiente será negativo.

De reparar que, pela equação (3.38), que define o módulo de Compressibilidade para materiais isotrópicos, quando $\nu = 0.5$, a compressibilidade do material é zero. Através das constantes de Lamé é possível determinar o intervalo teórico dos limites desta propriedade, encontrando-se entre -1 e 0.5 .

No processo de otimização, a relação que permite a obtenção do coeficiente de Poisson através do tensor de flexibilidade é:

$$\nu = -\frac{C_{1122}}{C_{1111}} \quad (3.62)$$

Onde C_{ijkl} representa o tensor da flexibilidade (*compliance*). Esta é obtida a partir de um ensaio de tensão uniaxial, em que aplicando uma carga σ_{11} , o rácio das deformações entre as direções 1 e 2 (equação 3.61), é dado pelo rácio entre as componentes C_{1122} e C_{1111} (equação 3.62).

3.6 Efeitos de escala

Como já referido anteriormente, um dos objetivos da presente dissertação é a análise numérica do coeficiente de Poisson, de modo a verificar se os resultados convergem para os mesmos valores obtidos através da homogeneização.

O estudo dos efeitos de escala é feito através da realização de ensaios numéricos aplicando diferentes condições de fronteira na microestrutura, de modo a observar como é que as propriedades do material convergem com o aumento do fator de escala n . Este fator é definido como sendo o rácio entre o tamanho D do compósito e o tamanho d da célula unitária ($n = \frac{D}{d}$). Assumindo que o domínio ψ do compósito é um cubo unitário, i.e $|\psi| = 1$, ou $D = 1$, n torna-se no número de vezes em que a célula unitária é repetida nas três direções espaciais (na presente dissertação o estudo é realizado só em duas direções).

Tendo em conta que as propriedades elásticas homogeneizadas E_{ijkl}^H são calculadas através repetição infinita da célula unitária, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, o que reflete uma independência do tensor elástico homogeneizado em relação ao fator de escala. No entanto, na prática, tal independência não existe, o que torna necessária o estudo dos efeitos de escala, de modo a comparar as propriedades homogeneizadas com as propriedades do compósito gerado através da repetição da célula unitária n vezes (ver figura 3.14), e conferir o quão precisa é a teoria da homogeneização e a respetiva validação desta (Coelho et al. 2015).

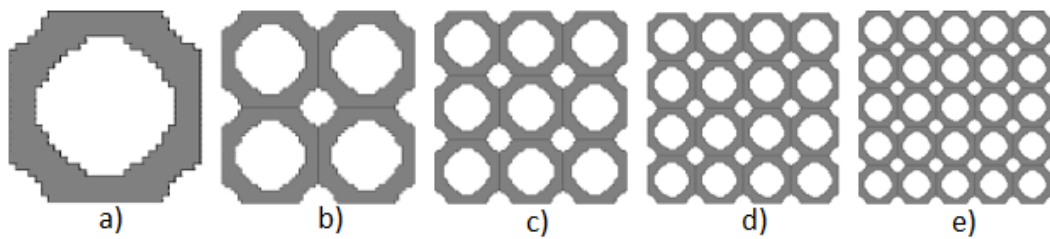


Figura 3.14 – Representação da célula unitária em a) e de sucessivas repetições desta na direção y e z , b) 2x2, c) 3x3, d) 4x4, e) 5x5

4 Formulação de problemas e ensaios numéricos

O presente capítulo encontra-se dividido em três secções principais. Na primeira secção é realizado o estudo sobre o problema de otimização tradicional (minimização da *compliance* com constrangimento de volume), onde são tidos em conta diferentes fatores que influenciam o processo de otimização. Na segunda secção são demonstrados os diferentes problemas formulados, tendo em atenção as funções objetivo e constrangimentos, e os respetivos gradientes. Por último, são caracterizados os ensaios numéricos realizados no *software Ansys*, de modo a estimar os valores do coeficiente de Poisson.

Visto que nesta dissertação utiliza-se o plano *yz* para definir a microestrutura, o tensor constitutivo que importa observar é o destacado na figura 4.1.

$$\begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1123} & E_{1131} & E_{1112} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2223} & E_{2231} & E_{2212} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3323} & E_{3331} & E_{3312} \\ E_{2311} & E_{2322} & E_{2333} & E_{2323} & E_{2331} & E_{2312} \\ E_{3111} & E_{3122} & E_{3133} & E_{3123} & E_{3131} & E_{3112} \\ E_{1211} & E_{1222} & E_{1233} & E_{1223} & E_{1231} & E_{1212} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} E_{2222} & E_{2233} & E_{2223} \\ E_{3322} & E_{3333} & E_{3323} \\ E_{2322} & E_{2333} & E_{2323} \end{bmatrix}$$

Figura 4.1 -Simplificação do tensor de elasticidade

A direção y corresponde ao índice 2, a direção z ao índice 3, e a direção x , perpendicular ao plano, corresponde ao índice 1.

Deste modo, a lei de Hooke pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{2222} & E_{2233} & E_{2223} \\ E_{3322} & E_{3333} & E_{3323} \\ E_{2322} & E_{2333} & E_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

E a respetiva invertida:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{2222} & C_{2233} & 2C_{2223} \\ C_{3322} & C_{3333} & 2C_{3323} \\ 2C_{2322} & 2C_{2333} & 4C_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

4.1 Fatores de influência na otimização

O estudo da influência de certos fatores na otimização, nomeadamente: a carga aplicada, estratégias de filtros de sensibilidades, *design* inicial e o refinamento da malha de elementos finitos, foi realizado através do problema da minimização da flexibilidade com constrangimentos de volume, idêntico à formulação em (2.2). Para este problema, foi considerado um material base com $E = 290$ [MPa] e $\nu = 0.3$.

A função objetivo é escrita da seguinte maneira:

$$\min_{\mu} C_{ijkl}^H(\mu) \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl} \quad (4.3)$$

onde $\bar{\sigma}$ representa o tensor que caracteriza o campo de tensões médias macroscópicas aplicadas no compósito e é expresso em [N/m²]. O tensor da rigidez $E_{ijkl}^H(\mu)$ é expresso em [N/m²], pelo que, sendo o inverso da *compliance* $C_{ijkl}^H(\mu)$, esta é expressa em [m²/N]. Deste modo, a função objetivo tem como unidades [N/m²]. Considerando o problema como sendo a minimização da densidade de energia de tensão, é possível também exprimir a função objetivo em [J/m³].

O gradiente da função objetivo é calculado do seguinte modo:

$$\mathbf{E}(\mu) \mathbf{C}(\mu) = \mathbf{I} \quad (4.4)$$

Onde $\mathbf{E}(\mu)$ e $\mathbf{C}(\mu)$ representam os tensores da rigidez e da flexibilidade de um dado elemento de densidade local μ , e \mathbf{I} representa a matriz identidade. Derivando esta equação em ordem a cada variável de projeto μ tem-se:

$$\frac{\partial E(\mu)}{\partial \mu} C(\mu) + \frac{\partial C(\mu)}{\partial \mu} E(\mu) = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial C(\mu)}{\partial \mu} E(\mu) = -\frac{\partial E(\mu)}{\partial \mu} C(\mu) \quad (4.6)$$

De modo a obter somente a derivada da *compliance*, multiplica-se os dois membros por $C(\mu)$:

$$\frac{\partial C(\mu)}{\partial \mu} E(\mu) C(\mu) = -\frac{\partial E(\mu)}{\partial \mu} C(\mu) C(\mu) \quad (4.7)$$

Através da equação (4.4), tem-se:

$$\frac{\partial C(\mu)}{\partial \mu} = -\frac{\partial E(\mu)}{\partial \mu} C(\mu) C(\mu) \quad (4.8)$$

O constrangimento do problema tem como princípio limitar um volume máximo da microestrutura. Sem este, o algoritmo preencheria todo o domínio de projeto com material de densidade máxima ($\mu = 1$), conferindo assim a maior rigidez possível à microestrutura. A função constrangimento pode ser escrita do seguinte modo:

$$V \leq V_{max} \quad (4.9)$$

Onde V representa o volume de material da célula e V_{max} o volume limite. O volume da célula é calculado do seguinte modo:

$$V = \sum_{i=1}^N \mu_i v_i \quad (4.10)$$

Onde μ_i e v_i correspondem à densidade e volume de cada N elementos finitos ($N = n \times n$), em que n representa o número de elementos finitos nas direções y e z . Os constrangimentos têm que ser escritos na forma $g_t \leq 1$, onde o índice t representa o constrangimento de 1 a m constrangimentos, pelo que se rescreve a função do seguinte modo:

$$V - V_{max} \leq 0 \quad (4.11)$$

$$V - V_{max} + 1 \leq 1 \quad (4.12)$$

O volume limite V_{max} estudado nesta dissertação é de 50%. O seu gradiente é dado por:

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = v_i \quad (4.13)$$

Outra maneira de formular este constrangimento é:

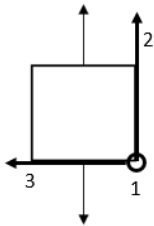
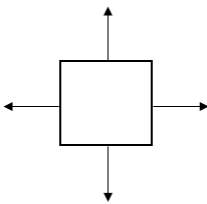
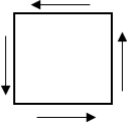
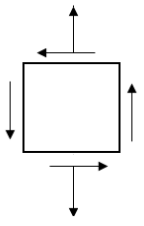
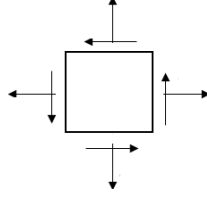
$$\frac{V}{V_{max}} \leq 1 \quad (4.14)$$

Com o seu respetivo gradiente:

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = \frac{v_i}{V_{max}} \quad (4.15)$$

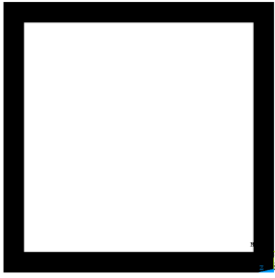
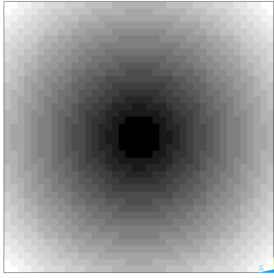
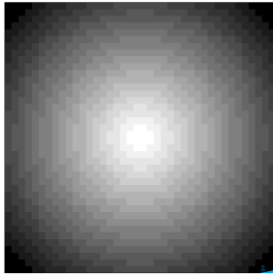
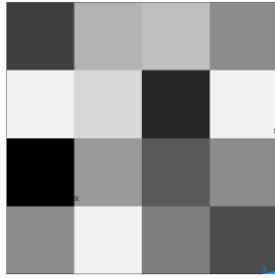
Os estados de carga estudados são aplicados somente ao plano yz , como se pode observar na tabela 4.1, tendo cada componente da tensão o valor de 1 [MPa]. Relativamente a este parâmetro, também foram gerados estados de carga aleatórios com o objetivo de obter diferentes tipos de microestrutura.

Tabela 4.1 – Estados de carga aplicados na célula unitária no plano yz .

				
Uniaxial	Biaxial	Corte	Uniaxial e corte	Biaxial e corte

Na presente dissertação, foram testadas quatro *designs* iniciais diferentes, como se pode observar na tabela 4.2. A inicialização “Box Type” é da forma de uma caixa, onde existe uma região com material mais denso (preto) e outra região com material menos denso (branco). A inicialização “InvTarget” gera uma distribuição de material mais densa nas extremidades, diminuindo a densidade à medida que se aproxima do centro da célula. A inicialização “Target” é o inverso da última, contendo o material mais denso no centro da célula e que diminui radialmente à medida que se afasta do centro. A inicialização “Random” é a mais irregular destas todas, onde é atribuído a cada conjunto de elementos uma densidade aleatória, formando um padrão com dezasseis quadrados com densidades diferentes.

Tabela 4.2 – Diferentes células iniciais

			
Box Type	Target	InvTarget	Random

Quanto à estratégia do filtro de sensibilidades, foram abordadas duas estratégias. Uma consiste em manter o filtro de sensibilidades ativo ao longo das iterações sem alterar o valor do seu raio. Outra estratégia é ter o filtro com o raio variável ao longo de cada iteração.

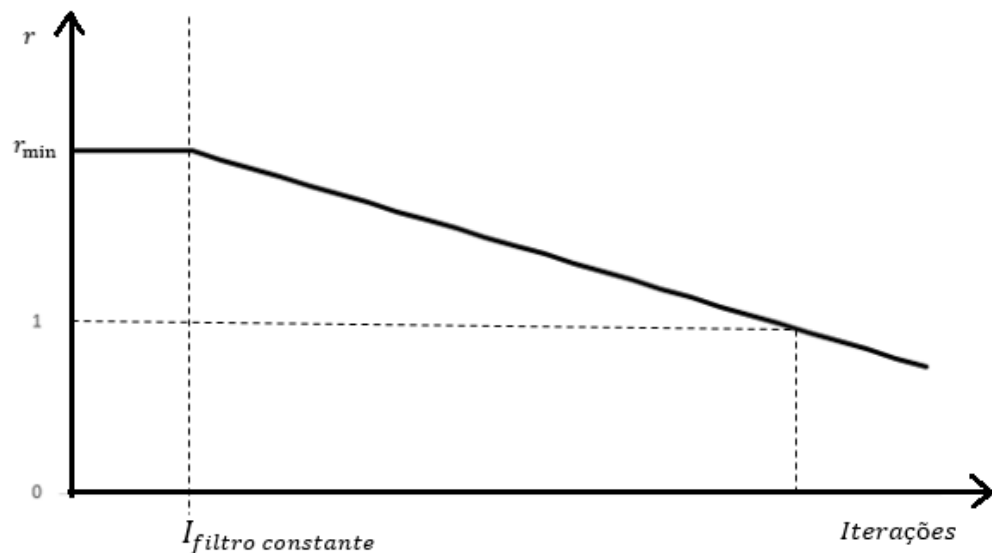


Figura 4.2 – Gráfico da variação do raio do filtro de sensibilidades em função do número de iterações.

Se o filtro for constante ao longo de todo o processo de otimização, a iteração $I_{filtro\ constante}$ será igual ao número de iterações realizadas. Quanto à estratégia de filtro variável, existem duas opções: começar com o raio r_{min} e mantê-lo constante até à iteração $I_{filtro\ constante}$ e depois reduzir o seu valor até ser menor que 1, ou definindo $I_{filtro\ constante} = 0$, ou seja, o raio do filtro de sensibilidades começa a diminuir a partir da primeira iteração. Para este estudo foi utilizado esta última estratégia e o filtro sempre constante.

Foram realizadas análises nas malhas (1×20×20), (1×30×30), (1×40×40) e (1×50×50), no entanto, nos resultados serão apenas apresentadas as microestruturas ótimas obtidas na malha (1×40×40), pois foi esta, tomando como critério a relação entre qualidade dos resultados obtidos e o custo computacional, a que melhor se ajustava a este trabalho. São também apresentadas microestruturas obtidas através da malha mais grosseira, (1×20×20), de modo a poder comparar a definição do *design* de material.

Para a melhor microestrutura de cada estado de carga, isto é, aquela com o valor da função objetivo mais baixo, é apresentada o seu grau de anisotropia, no plano *yz* e no espaço 3D.

4.2 Otimização

Nesta secção, serão apresentados todos os problemas considerados nesta tese e respetivas formulações. Esta é composta por diferentes partes, consoante o tipo de função objetivo ou constrangimentos definidos, nomeadamente: otimização das diferentes constantes elásticas e propriedades, imposição de constrangimentos de simetria e minimização do coeficiente de Poisson.

4.2.1 Propriedades elásticas

Para determinados optimizadores, como o MMA, a maximização tem que ser escrita em forma de minimização, ou seja:

$$\max_{\mu} f = \min_{\mu} -f \quad (4.16)$$

Assim, o problema da maximização das constantes elásticas E_{2222} , E_{3333} e E_{2323} , com constrangimento de volume pode ser escrito do seguinte modo:

$$\min_{\mu} -(E_{2222}(\mu), E_{3333}(\mu), E_{2323}(\mu)) \quad (4.17a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.17b)$$

O gradiente da função objetivo é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = -\frac{\partial E_{2222}(\mu)}{\partial \mu}, -\frac{\partial E_{3333}(\mu)}{\partial \mu}, -\frac{\partial E_{2323}(\mu)}{\partial \mu} \quad (4.19)$$

Onde $\frac{\partial f}{\partial \mu}$ representa a derivada de cada função objetivo, respetivamente.

Em seguida é apresentada uma formulação de um problema onde se pretende a maximização de duas componentes elásticas em simultâneo.

$$\min_{\mu} - (E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu)) \quad (4.20a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.20b)$$

O gradiente da função objetivo é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = - \left(\frac{\partial E_{2222}(\mu)}{\partial \mu} + \frac{\partial E_{3333}(\mu)}{\partial \mu} \right) \quad (4.21)$$

Para demonstrar a influência dos pesos na função objetivo foi formulado o seguinte problema:

$$\min_{\mu} - (w_1 E_{2222}(\mu) + w_2 E_{3333}(\mu)) \quad (4.22a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.22b)$$

Onde w_1 e w_2 representam os pesos atribuídos a cada componente da função objetivo. O gradiente, semelhante à equação (4.21) é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = - \left(w_1 \frac{\partial E_{2222}(\mu)}{\partial \mu} + w_2 \frac{\partial E_{3333}(\mu)}{\partial \mu} \right) \quad (4.23)$$

O módulo de Compressibilidade é maximizado através da seguinte forma:

$$\min_{\mu} - \frac{1}{4} (E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) + 2E_{2233}(\mu)) \quad (4.24a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.24b)$$

Sendo o seu gradiente calculado através de:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial E_{2222}(\mu)}{\partial \mu} + \frac{\partial E_{3333}(\mu)}{\partial \mu} + 2 \frac{\partial E_{2233}(\mu)}{\partial \mu} \right) \quad (4.25)$$

Formulação de problemas e ensaios numéricos

O módulo de Corte resulta da maximização do componente do tensor elástico E_{2323} , logo tem-se:

$$\min_{\mu} - E_{2323}(\mu) \quad (4.26a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.26b)$$

A derivada da função objetivo é naturalmente:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = - \frac{\partial E_{2323}(\mu)}{\partial \mu} \quad (4.27)$$

4.2.2 Simetria de material

Nesta secção pretende-se obter diversos tipos de simetria do tensor de elasticidade. As funções de simetria podem ser escritas sob a forma de funções de constrangimento, ou como funções de penalidade na função objetivo, sendo apresentados problemas utilizando os diferentes modos.

De modo a obter as constantes elásticas E_{2222} e E_{3333} iguais, formulou-se:

$$\min_{\mu} - E_{2222}(\mu) \quad (4.28a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.28b)$$

$$E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu) \quad (4.28c)$$

O constrangimento g_2 (equação 4.28c), embora seja de igualdade, o otimizador lida apenas com constrangimentos de desigualdade, pelo que este tem que ser implementado no seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu) &\Leftrightarrow \frac{E_{2222}(\mu)}{E_{3333}(\mu)} = 1 \Leftrightarrow \frac{E_{2222}(\mu)}{E_{3333}(\mu)} - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{E_{2222}(\mu)}{E_{3333}(\mu)} - 1 \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{E_{2222}(\mu)}{E_{3333}(\mu)} - 1 \right)^2 \leq \delta \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{E_{2222}(\mu)}{E_{3333}(\mu)} - 1 \right)^2 - \delta \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{E_{2222}(\mu)}{E_{3333}(\mu)} - 1 \right)^2 - \delta + 1 \leq 1
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Eleva-se o termo $\left(\frac{E_{2222}(\mu)}{E_{3333}(\mu)} - 1 \right)$ ao quadrado, para assegurar que o resultado seja positivo e compreendido entre os valores 0 e 1. A constante δ corresponde a uma tolerância dada ao algoritmo de modo a permitir uma convergência estável, variando entre $\delta = 10^{-4}$ e $\delta = 10^{-7}$, consoante se pretenda dar uma maior ou menor tolerância, respetivamente.

O gradiente da função objetivo é idêntico ao obtido na equação (4.17), e o gradiente do constrangimento g_2 é o seguinte:

$$\frac{\partial g_2}{\partial \mu} = 2 \times \left(\frac{E_{2222}(\mu)}{E_{3333}(\mu)} - 1 \right) \times \left(\frac{\frac{\partial E_{2222}(\mu)}{\partial \mu}}{E_{3333}(\mu)} - \frac{E_{2222}(\mu) \frac{\partial E_{3333}(\mu)}{\partial \mu}}{E_{3333}^2(\mu)} \right) \tag{4.30}$$

Tendo demonstrado o modo de introduzir relações entre as diferentes componentes do tensor de elasticidade, é apresentada na seguinte tabela o tensor de elasticidade no plano yz e o seu aspeto consoante o nível de simetria imposto.

De salientar que na obtenção destas simetrias, são ignoradas as componentes do tensor elástico referentes à direção x , pelo que a simetria isotrópica é apenas obtida no plano yz , sendo na realidade um caso de simetria transversalmente isotrópica, como explicitado no capítulo anterior.

Tabela 4.3 - Representação do tensor de elasticidade no plano yz e das suas simetrias.

Tensor de Elasticidade	Simetrias de material
$\begin{bmatrix} E_{2222} & E_{2233} & E_{2223} \\ E_{3322} & E_{3333} & E_{3323} \\ E_{2322} & E_{2333} & E_{2323} \end{bmatrix}$	Ortotrópica $\begin{bmatrix} E_{2222} & E_{2233} & 0 \\ E_{3322} & E_{3333} & 0 \\ 0 & 0 & E_{2323} \end{bmatrix}$
	Cúbica $\begin{bmatrix} E_{2222} & E_{2233} & 0 \\ E_{3322} & E_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & E_{2323} \end{bmatrix}$
	Isotrópica $\begin{bmatrix} E_{2222} & E_{2233} & 0 \\ E_{3322} & E_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(E_{2222} - E_{2233}) \end{bmatrix}$

4.2.2.1 Simetria Ortotrópica

Para este tipo de simetria, é apenas necessário garantir que as componentes E_{2223} e E_{3323} sejam nulas. As componentes axiais E_{2222} e E_{3333} e a de corte E_{2323} podem assumir qualquer valor diferente de zero. Assim sendo, o problema pode ser formulado do seguinte modo:

$$\min_{\mu} -E_{2222}(\mu) \quad (4.31a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.31b)$$

$$E_{2223}(\mu) = 0 \quad (4.31c)$$

$$E_{3323}(\mu) = 0 \quad (4.31d)$$

$$E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu) \quad (4.31e)$$

A função objetivo é idêntica à função apresentada na formulação (4.17), pelo que o seu gradiente é o mesmo. O constrangimento de igualdade entre as componentes E_{2222} e E_{3333} é definido para atribuir rigidez a esta última, no entanto possui uma tolerância δ suficientemente grande para que estas não sejam iguais. As funções de constrangimento das componentes E_{2223} e E_{3323} (equações 4.31c e 4.31d) são obtidas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} E_{2223}(\mu) = 0 &\Leftrightarrow (E_{2223}(\mu))^2 = 0 \Leftrightarrow (E_{2223}(\mu))^2 - \delta \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (E_{2223}(\mu))^2 - \delta + 1 \leq 1 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Da mesma forma se obtém a restrição g_3 (equação 4.31d). O gradiente destes constrangimentos é o seguinte:

$$\frac{\partial g_2}{\partial \mu} = 2 \times \left(\frac{\partial E_{2223}(\mu)}{\partial \mu} \right) \times (E_{2223}(\mu)) \quad (4.33)$$

4.2.2.2 *Simetria cúbica*

Este é um caso de simetria idêntico ao anterior, no entanto, possui mais uma restrição de igualdade entre as componentes E_{2222} e E_{3333} , podendo o problema ser escrito do seguinte modo:

$$\min_{\mu} - (E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu)) \quad (4.34a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.34b)$$

$$E_{2223}(\mu) = 0 \quad (4.34c)$$

$$E_{3323}(\mu) = 0 \quad (4.34d)$$

$$E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu) \quad (4.34e)$$

Todas estas funções, objetivo e de constrangimento, já foram explicadas em formulações anteriores, assim como as suas derivadas.

4.2.2.3 *Simetria Isotrópica*

Este tipo de simetria é a mais complexa de obter, pois partindo de uma solução anisotrópica, pretende-se que, através de todos os constrangimentos aplicados, a solução convirja para a solução isotrópica, onde a sua medida de anisotropia é nula ($\mathcal{A} = 0$). Foram formulados vários problemas com vista à obtenção deste tipo de microestruturas, mas sempre sem sucesso. Na formulação (4.35) é possível observar um exemplo de uma das tentativas de alcançar uma microestrutura isotrópica.

Em relação ao problema anterior, para obter este tipo de simetria, é necessária a adição de mais uma restrição, que relacione a constante elástica E_{2323} com a constante E_{2222} , como se pode observar na tabela (4.3).

$$\min_{\mu} C_{ijkl}^H(\mu) \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl} \quad (4.35a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.35b)$$

$$E_{2223}(\mu) = 0 \quad (4.35c)$$

$$E_{3323}(\mu) = 0 \quad (4.35d)$$

$$E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu) \quad (4.35e)$$

$$\frac{1}{4} (E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) - 2E_{2233}(\mu)) = E_{2323}(\mu) \quad (4.35f)$$

A função da restrição g_5 (equação 4.35f) é escrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4}(E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) - 2E_{2233}(\mu)) = E_{2323}(\mu) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) - 2E_{2233}(\mu)) = 4E_{2323}(\mu) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{(E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) - 2E_{2233}(\mu))}{4E_{2323}(\mu)} = 1 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left(\frac{(E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) - 2E_{2233}(\mu))}{4E_{2323}(\mu)} - 1 \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left(\frac{(E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) - 2E_{2233}(\mu))}{4E_{2323}(\mu)} - 1 \right)^2 + 1 - \delta \leq 1
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Da relação da tabela (4.3) na simetria isotrópica, bastaria que o constrangimento fosse o seguinte:

$$\frac{1}{2}(E_{2222}(\mu) - E_{2233}(\mu)) = E_{2323}(\mu) \tag{4.37}$$

No entanto, através de algumas análises e com o estudo da bibliografia, concluiu-se que seria mais estável para o algoritmo adicionar a componente E_{3333} , igual a E_{2222} , de modo a que este atribuisse o mesmo valor a estas duas durante a otimização.

O gradiente da restrição g_5 é dado por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_5}{\partial \mu} &= 2 \times \left(\frac{E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) - 2E_{2233}(\mu)}{4E_{2323}(\mu)} \right) \\
 &\times \left(\frac{\left(\frac{\partial (E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) - 2E_{2233}(\mu))}{\partial \mu} \right)}{4E_{2323}(\mu)} \right) \\
 &- (E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) - 2E_{2233}(\mu)) \left(\frac{\frac{4\partial E_{2323}(\mu)}{\partial \mu}}{(4E_{2323}(\mu))^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Não tendo sido possível atingir uma solução ótima, foi adotada uma estratégia com o intuito de superar esta dificuldade. Esta consiste na divisão da célula unitária em quatro partes iguais, realizando a otimização só para um quarto da célula, no final é feita a simetria em relação aos eixos yy (22) e zz (33). Com este método obtém-se uma microestrutura simétrica em ambos os eixos, como se pode observar na seguinte figura:

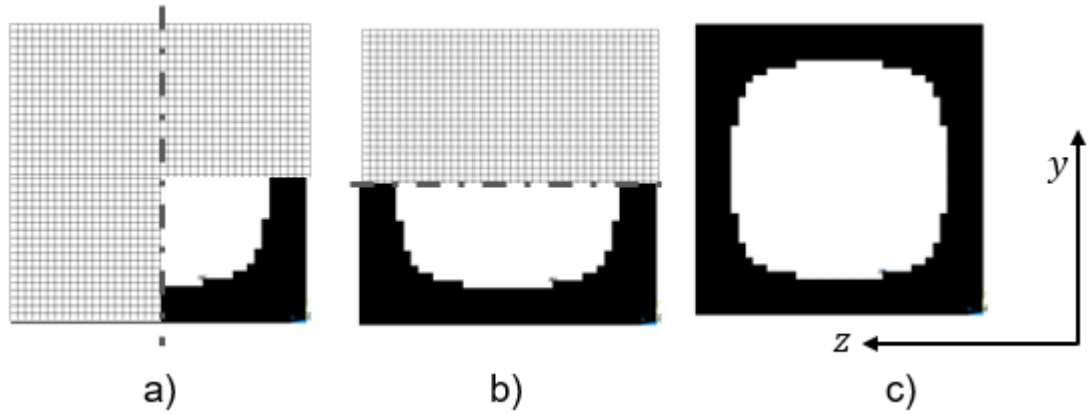


Figura 4.3 -Em a) encontra-se representada a otimização de um quarto da microestrutura e o eixo de simetria utilizado. Em b) encontra-se a microestrutura espelhada em relação ao eixo horizontal. Em c) está representada a microestrutura completa e o respetivo referencial.

Com esta simplificação, formulou-se o seguinte problema, que consiste na minimização da *compliance* com penalização de isotropia:

$$\min_{\mu} w_1(f_{objf1}) + w_2(f_{objf2} + f_{objf3}) \quad (4.39a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.39b)$$

Onde:

$$\begin{cases} f_{objf1} = C_{ijkl}^H(\mu) \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl} \\ f_{objf2} = (E_{2222}(\mu) - E_{3333}(\mu))^2 \\ f_{objf3} = (E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) - 2E_{2233}(\mu) - 4E_{2323}(\mu))^2 \end{cases} \quad (4.40)$$

Esta formulação tem como objetivo conferir rigidez à microestrutura através da minimização da densidade de energia de tensão, e ao mesmo tempo penalizá-la com os constrangimentos de isotropia também na função objetivo. Desta forma, para que o valor da função objetivo seja o mais ótimo possível, as diferenças das funções de penalidade têm que ser o mais próximo do valor zero. Os gradientes das funções objetivo 2 e 3, f_{objf2} e f_{objf3} , respetivamente, são:

$$\frac{\partial f_{objf2}}{\partial \mu} = 2 \times \left(\frac{\partial E_{2222}(\mu) - \partial E_{3333}(\mu)}{\partial \mu} \right) \times (E_{2222}(\mu) - E_{3333}(\mu)) \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{objf3}}{\partial \mu} = 2 \times & \left(\frac{\partial E_{2222}(\mu) + \partial E_{3333}(\mu) - \partial 2E_{2233}(\mu) - \partial 4E_{2323}(\mu)}{\partial \mu} \right) \\ & \times (E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) - 2E_{2233}(\mu) - 4E_{2323}(\mu)) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Este método revelou ser bastante eficaz na obtenção deste tipo de simetria de material nas microestruturas. Com o propósito de obter também este tipo de resultados em problemas de otimização na célula inteira (formulação 4.35), foi introduzido um ficheiro de densidades de uma célula isotrópica como *design* inicial desse problema. Desta forma, o algoritmo inicia as iterações já num meio praticamente isotrópico, reagindo de forma estável aos constrangimentos de isotropia impostos.

4.2.3 Minimização do coeficiente de Poisson

Nesta secção são apresentadas várias formulações do problema da minimização do coeficiente de Poisson na perspectiva de obter materiais auxéticos. Da revisão bibliográfica apresentada no capítulo 2, é possível constatar uma relativa escassez de formulações para este problema, pelo que parte das formulações apresentadas são fundamentadas em estudos teóricos realizados ao longo desta dissertação.

Em (Prawoto 2012) é demonstrada uma relação entre o módulo de Compressibilidade K e o módulo de Corte G , e como estes afetam o coeficiente de Poisson, em materiais convencionais em engenharia. A maior parte deste tipo de materiais possui uma maior resistência à variação de volume do que à distorção, *i.e* o módulo de Compressibilidade é superior ao módulo de Corte. Alterando o *design* da

microestrutura é possível diminuir o valor do coeficiente de Poisson, e com isto alterar os valores de K e G , mantendo o módulo de Young E constante, como se pode constatar através das seguintes relações, em que sabendo: $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ e $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, para materiais isotrópicos, tem-se:

$$\frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} = \frac{3K}{2G} \quad (4.43)$$

É possível observar que à medida que se diminui o valor de ν , a relação $\frac{3K}{2G}$ diminui conseqüentemente, pelo que se conclui que os materiais com coeficiente de Poisson menor possuem uma maior resistência ao corte do que à variação de volume, ou seja, o módulo de corte aumenta em relação ao módulo de compressibilidade.

A figura 4.4 consiste numa adaptação de uma figura encontrada em Prawoto (2012), que contém uma incorreção, mas aqui demonstra-se a curva corrigida que relaciona o coeficiente de Poisson com a relação $\frac{1+\nu}{1-2\nu}$.

Observa-se que em materiais auxéticos a relação $\frac{1+\nu}{1-2\nu}$ tem que ser inferior a 1. Os materiais denominados de convencionais na engenharia encontram-se na região de fundo verde, onde o valor do coeficiente de Poisson ν é superior a 0.1. Na figura 4.5 é demonstrado mais detalhadamente a relação entre K , G e ν . É de realçar que à medida que o coeficiente de Poisson diminui, o módulo de Corte aumenta em relação ao módulo de Compressibilidade.

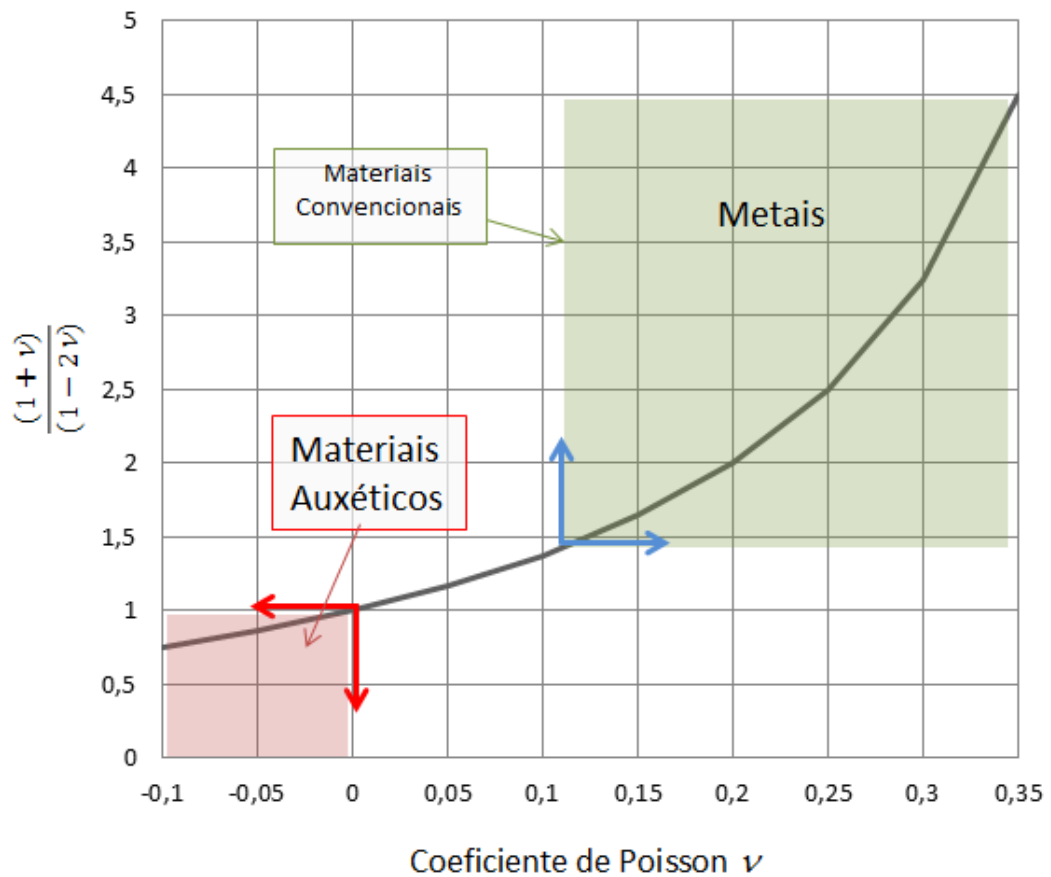


Figura 4.4 - Descrição gráfica da relação entre o coeficiente de Poisson e o valor de $\frac{1+\nu}{1-2\nu}$ para materiais convencionais.

Estas relações têm interesse, pois ao definir um problema com o objetivo de minimizar o coeficiente de Poisson sujeito ao constrangimento de volume, o processo de otimização será altamente instável devido à baixa rigidez atribuída à microestrutura. Assim sendo, é importante conferir-lhe rigidez, enquanto se dá a minimização do coeficiente de Poisson. Na seguinte formulação, à imagem do que foi anteriormente explicado, é definida uma função multiobjetivo onde é maximizado o módulo de corte e minimizado o coeficiente de Poisson $\left(\nu(\mu) = -\frac{C_{2233}(\mu)}{C_{2222}(\mu)} \right)$.

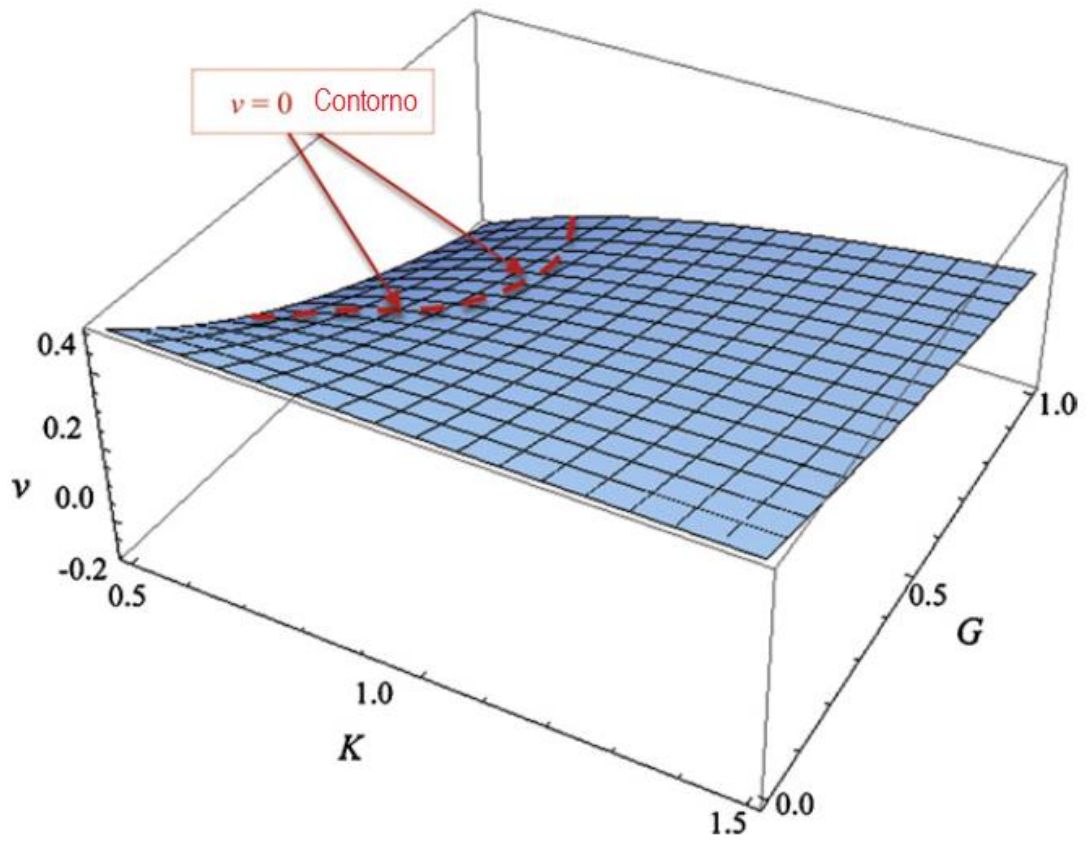


Figura 4.5 -Descrição gráfica entre os valores de K , G e v . (Prawoto 2012).

$$\min_{\mu} w_1 f_{objf1} + w_2 f_{objf2} \quad (4.44a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.44b)$$

$$E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu) \quad (4.44c)$$

Onde a função objetivo é composta por:

$$\begin{cases} f_{objf1} = C_{2323}(\mu) \\ f_{objf2} = -\frac{C_{2233}(\mu)}{C_{2222}(\mu)} \end{cases} \quad (4.45)$$

O gradiente de f_{objf2} é dado por:

$$\frac{\partial f_{objf2}}{\partial \mu} = - \left(\frac{\frac{\partial C_{2233}(\mu)}{\partial \mu}}{C_{2222}(\mu)} - \frac{\left(C_{2233}(\mu) \times \frac{\partial C_{2222}(\mu)}{\partial \mu} \right)}{C_{2222}(\mu)^2} \right) \quad (4.46)$$

A próxima formulação tem em vista a otimização das propriedades elásticas de modo a obter o tensor alvo E_{ijkl}^T característico de um material auxético, ou seja, são definidas constantes elásticas e através da função objetivo procura-se minimizar o erro entre estas e as constantes elásticas da homogeneização. Com o fim de facilitar a definição dos valores das constantes elásticas alvo, foram atribuídas novas propriedades ao material base de modo a que o módulo de Young seja unitário, i.e $E^0 = 1$. Desta forma as constantes de Lamé são as seguintes: $\lambda = 0.576923077$ [Pa] e $\mu = 0.34615385$ [Pa]. O problema é formulado então da seguinte maneira:

$$\min_{\mu} w_1 f_{objf1} + w_2 f_{objf2} + w_3 f_{objf3} + w_4 f_{objf4} \quad (4.47a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.47b)$$

As funções objetivo são as seguintes:

$$\begin{cases} f_{objf1} = \left(\frac{E_{2222}(\mu)}{E_{2222}^T} - 1 \right)^2 \\ f_{objf2} = \left(\frac{E_{3333}(\mu)}{E_{3333}^T} - 1 \right)^2 \\ f_{objf3} = \left(\frac{E_{2233}(\mu)}{E_{2233}^T} - 1 \right)^2 \\ f_{objf4} = \left(\frac{E_{2323}(\mu)}{E_{2323}^T} - 1 \right)^2 \end{cases} \quad (4.48)$$

Os pesos w_1 , w_2 , w_3 e w_4 tomam somente os valores 0 e 1. Quando um peso é igual a 1, significa que está a ser otimizada a respetiva constante elástica com vista a atingir o valor alvo, e quando é 0, essa determinada constante elástica não tem valor alvo no problema em questão.

Formulação de problemas e ensaios numéricos

Os gradientes de cada componente da função objetivo são idênticos, diferindo apenas o índice de cada constante elástica em causa. Pode então ser escrito do seguinte modo:

$$\frac{\partial f_{objf1}}{\partial \mu} = 2 \times \left(\frac{\frac{\partial E_{2222}(\mu)}{\partial \mu}}{E_{2222}^T} \right) \times \left(\frac{E_{2222}(\mu)}{E_{2222}^T} - 1 \right) \quad (4.49)$$

As próximas formulações contêm a minimização do coeficiente de Poisson e minimização da *compliance*, isto é, atribui rigidez à microestrutura sem afetar nenhuma constante elástica diretamente.

$$\min_{\mu} w_1 f_{objf1} + w_2 f_{objf2} \quad (4.50a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.50b)$$

$$E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu) \quad (4.50c)$$

Onde:

$$\begin{cases} f_{objf1} = C_{ijkl}^H(\mu) \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl} \\ f_{objf2} = -\frac{C_{2233}(\mu)}{C_{2222}(\mu)} \end{cases} \quad (4.51)$$

Por último, é abordado o problema da minimização do coeficiente de Poisson com constrangimentos de isotropia. Como já apresentado, a imposição dos constrangimentos de isotropia num problema clássico de minimização da densidade de energia é bastante problemática, o que também se verificou na minimização do coeficiente de Poisson. A estratégia adotada é similar à encontrada em (Andreassen et al. 2014) e já apresentada no capítulo 2. Tem-se então a seguinte formulação:

$$\min_{\mu} v(\mu) \quad (4.52a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad V \leq V_{max} \quad (4.52b)$$

$$E_{2223}(\mu) = 0 \quad (4.52c)$$

$$E_{3323}(\mu) = 0 \quad (4.52d)$$

$$E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu) \quad (4.52e)$$

$$\frac{1}{4}(E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) - 2E_{2233}(\mu)) = E_{2323}(\mu) \quad (4.52f)$$

$$K(\mu) \geq aK^* \quad (4.52g)$$

Os primeiros cinco constrangimentos aplicados são idênticos aos já apresentados no problema de simetria isotrópica. O sexto constrangimento (equação 4.52g) tem como função atribuir uma rigidez mínima à microestrutura, onde o $K(\mu)$ é o módulo de Compressibilidade homogeneizado, e tem que ser superior ao módulo de Compressibilidade K^* obtido num problema de maximização do módulo de compressibilidade na célula com 100% de volume, multiplicado por um rácio a . O constrangimento, é aplicado do seguinte modo:

Sabendo que $K(\mu) = \frac{1}{4}(E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) + E_{2233}(\mu))$ tem-se:

$$aK^* - \frac{1}{4}(E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu) + E_{2233}(\mu)) + 1 \leq 1 \quad (4.53)$$

O gradiente desta função é idêntico ao encontrado na equação (4.25).

4.3 Efeitos de escala

Na presente secção são apresentados os ensaios numéricos realizados, com vista a obter os valores dos coeficientes de Poisson e poder compará-los com os valores homogeneizados. Foram considerados dois tipos de ensaios, nomeadamente o ensaio normalizado de Dirichlet, e um ensaio numérico alternativo.

4.3.1 Ensaio normalizado de Dirichlet

Em (Zohdi & Wriggers 2004) são apresentadas as condições fronteira aplicadas no ensaio normalizado de Dirichlet, e são as seguintes:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \mid_{\partial\psi=\boldsymbol{\Theta}^i \cdot \mathbf{x}} \quad i=1, 2, 3 \quad (4.54)$$

Onde:

$$\boldsymbol{\Theta}^i = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Este é um tensor em que o índice i representa o número de ensaios realizados. Como se está a trabalhar só no plano yz , tem-se três tipos de carregamento: dois longitudinais nas direções y e z (2 e 3, respetivamente) e um de corte no plano yz . O vetor deslocamento é representado pela letra \mathbf{u} , $\partial\psi$ a fronteira do material, \mathbf{x} é o vetor de posição espacial e β é uma constante.

Aplicando o caso de carga $i = 1$, tem-se um ensaio longitudinal na direção y :

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Daqui obtém-se:

$$\begin{cases} u_2 = \beta x_2 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

Com isto, é possível verificar que o deslocamento na direção u_2 é linearmente dependente da coordenada de posição x_2 , e que, o deslocamento na direção u_3 é nulo. Sabendo que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.58)$$

Tem-se:

$$\varepsilon_{22} = \beta \quad (4.59)$$

Realizando o mesmo raciocínio para o caso $i = 2$, conclui-se que é aplicada uma deformação constante na fronteira $\partial\psi$ nos ensaios longitudinais.

No caso de corte $i = 3$ tem-se:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

E respetivamente:

$$\begin{cases} u_2 = \beta x_3 \\ u_3 = \beta x_2 \end{cases} \quad (4.61)$$

Tem-se facilmente que:

$$\varepsilon_{23} = \beta \quad (4.62)$$

Assim, conclui-se que também nos ensaios de corte, a deformação aplicada na fronteira é constante. Para uma melhor compreensão das condições de fronteira aplicadas é apresentado na Figura 4.6 a) encontram-se as condições de fronteira de um ensaio longitudinal e na Figura 4.6 b) as condições de fronteira do ensaio de corte.

A partir deste tipo de condições de fronteira, é possível estimar o tensor da rigidez \mathbf{E}^D . A tensão média $\langle \sigma \rangle$ e a deformação média $\langle \varepsilon \rangle$ são calculadas através da média volúmica ao longo de todos os elementos do domínio. Assim, realizando todos os ensaios, podem então ser calculadas as componentes do tensor elástico:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_{22} \rangle \\ \langle \sigma_{33} \rangle \\ \langle \tau_{23} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{2222}^D & E_{2233}^D & E_{2223}^D \\ E_{3322}^D & E_{3333}^D & E_{3323}^D \\ E_{2322}^D & E_{2333}^D & E_{2323}^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle \\ \langle \gamma_{23} \rangle \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Calculadas todas as componentes do tensor elástico E_{ijkl}^D , realiza-se a inversa desta matriz de modo a obter o tensor C_{ijkl}^D , com vista a poder comparar o coeficiente de Poisson numérico $\nu^D = \frac{C_{2233}^D}{C_{2222}^D}$ com o coeficiente homogeneizado $\nu^H = \frac{C_{2233}^H}{C_{2222}^H}$.

As microestruturas utilizadas nestes ensaios são referentes a materiais compósitos porosos com um rácio de rigidez entre as duas fases $\frac{E_{sólido}}{E_{vazio}} = 10^{12}$.

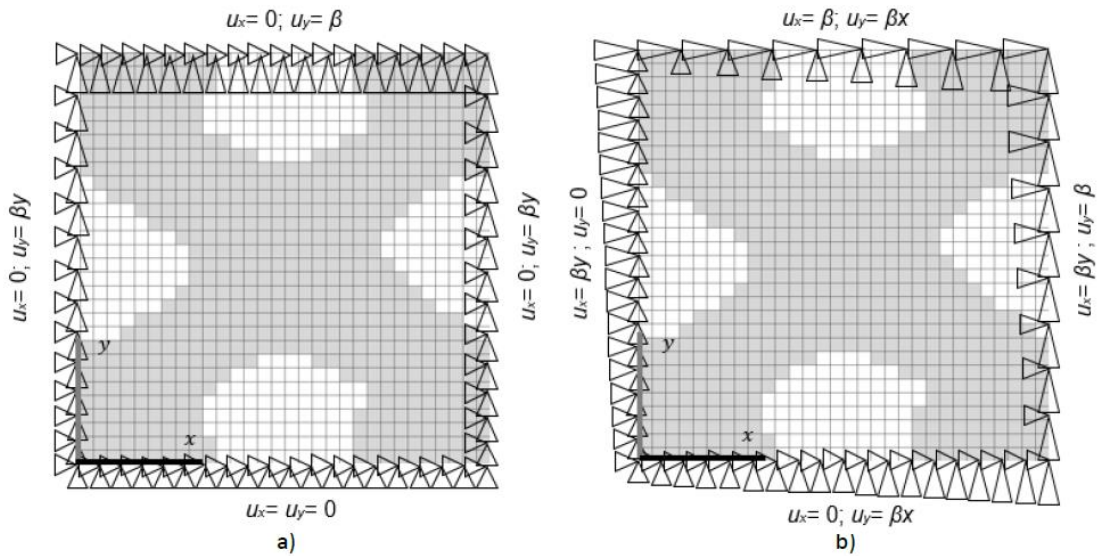


Figura 4.6 – Representação gráfica das condições de fronteira de Dirichlet. Em a) encontra-se um ensaio de carregamento longitudinal, e em b) um ensaio de carregamento ao corte. Adaptado de (Amiano 2015).

Nos ensaios numéricos realizados em (Reis 2016) e (Amiano 2015), o domínio de material é um cubo de dimensões $n \times n \times n$ e as condições de fronteira são aplicadas em todas as faces do cubo, porque é pretendido estimar todas as componentes do tensor elástico. Neste trabalho o domínio de material é uma placa de dimensões $1 \times n \times n$, onde só interessam as propriedades do tensor no plano yz , pelo que não faz sentido aplicar as condições de fronteira em todas as faces do domínio, ver Figura 4.7 a) mas apenas no bordo exterior do domínio, ver Figura 4.7 b).

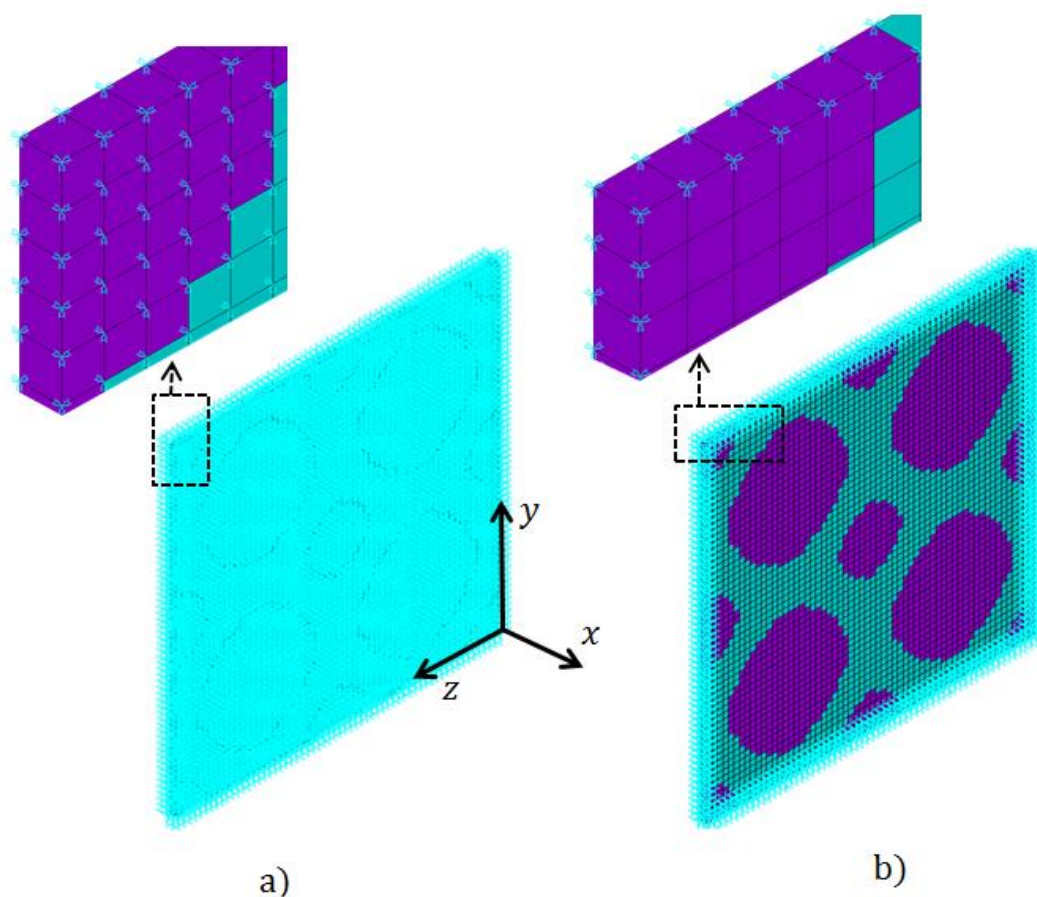


Figura 4.7 -Em a) encontra-se uma representação das condições de fronteira aplicadas em todo o domínio de material. Em b) encontra-se uma representação das condições de fronteira aplicadas no bordo do domínio de material.

4.3.2 Ensaios alternativos

As condições de fronteira de Dirichlet revelam ser eficientes no estudo dos efeitos de escala, como se pode verificar, por exemplo, em (Amiano 2015) e (Reis 2016). No entanto, não faz sentido a realização deste tipo de ensaios mecanicamente em laboratórios. Os ensaios alternativos propostos nesta dissertação, têm como objetivo fazer uma aproximação a um ensaio mecânico que pode ser considerado para avaliar o coeficiente de Poisson de um provete.

O ensaio passa por colocar a placa sobre apoios móveis ao longo de duas faces, nos planos xy e xz . Os apoios são aplicados a todos os nós de cada uma destas faces, conferindo assim estabilidade e restringindo os movimentos de translação em y e z e rotação segundo o eixo x . De modo a garantir a inexistência de qualquer movimento de corpo rígido, foram implementados três elementos do tipo SHELL63, de rigidez residual $E_{SHELL} = 1$ [Pa], e são conectados ao elemento do compósito localizado na origem do referencial (elemento 1), através dos nós. No nó da origem dos elementos *SHELL* são impostas condições de fronteira de deslocamento impedindo assim qualquer translação ou rotação (Reis 2016). A Figura 4.8 pretende demonstrar os apoios da placa. Os símbolos R_y e R_z representam as reações causadas pelos apoios ao longo de cada uma das faces, a de baixo (plano xz) e a do lado direito do referencial (plano xy), respetivamente.

Tendo a placa devidamente apoiada, é aplicado um deslocamento vertical de valor β na fronteira do topo da microestrutura. Recorde-se que o coeficiente de Poisson é dado pela expressão (3.61), que resulta do quociente entre a deformação específica numa direção e a deformação específica na direção ortogonal, onde é aplicada a força ou o deslocamento. Calcula-se a média da deformação de todos os elementos em cada direção, e faz-se o quociente para calcular ν , como se pode averiguar na equação (4.64).

$$\nu^* = \frac{\langle \varepsilon_{ii} \rangle}{\langle \varepsilon_{jj} \rangle} \quad (4.64)$$

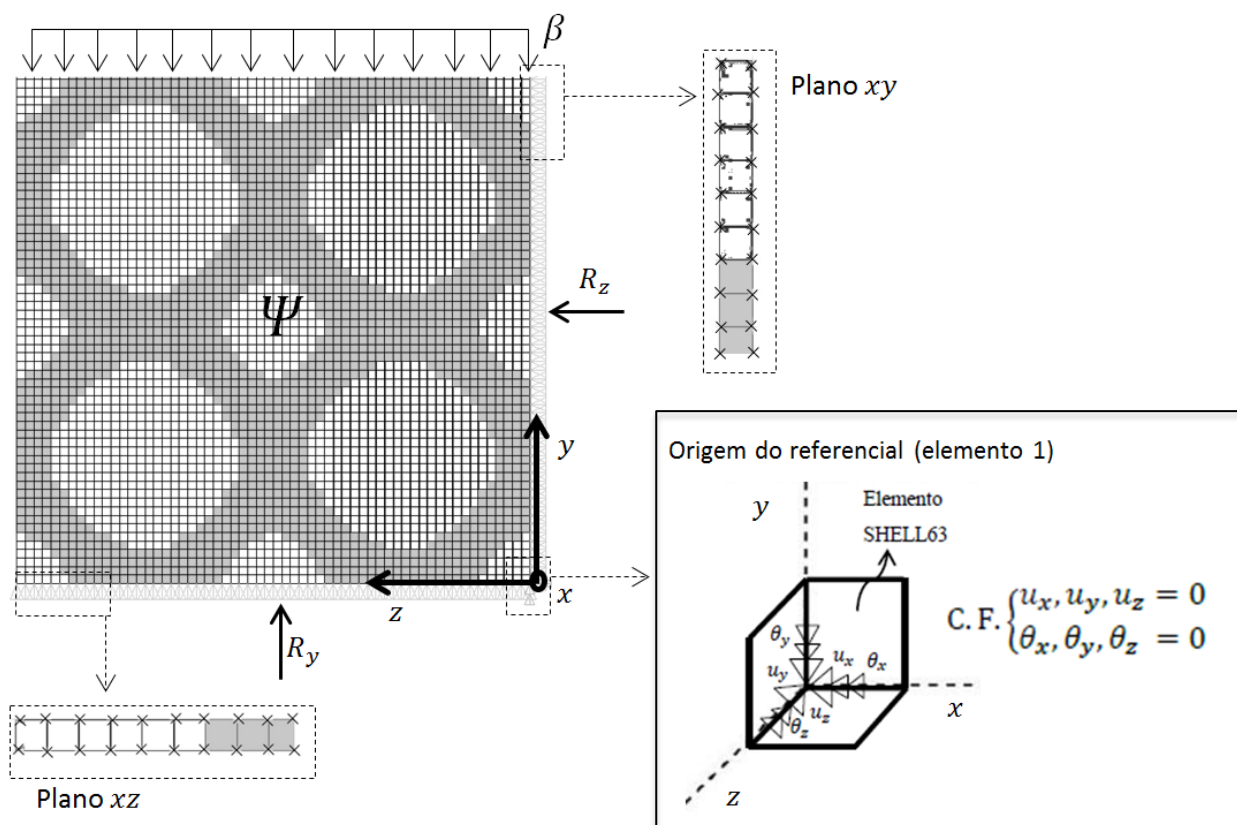


Figura 4.8 – Representação das condições de fronteira aplicadas nos ensaios numéricos alternativos (apoios móveis em duas faces laterais, deslocamento de valor β aplicado em todos os nós de uma face livre, deslocamentos e rotações nulas no nó dos elementos *SHELL* coincidentes com a origem do referencial).

5 Resultados

Como apresentado no capítulo 4, também o presente capítulo será dividido em três secções, onde serão dispostos os resultados referentes a cada secção (fatores de influência na otimização, otimização das propriedades elásticas e estudo dos efeitos de escala).

5.1 Fatores de influência na otimização

Foram realizadas análises em diferentes malhas de elementos finitos ($1 \times 20 \times 20$), ($1 \times 30 \times 30$), ($1 \times 40 \times 40$), ($1 \times 50 \times 50$). Contudo, para não tornar a dissertação demasiado longa com o mesmo tipo de resultados, foi selecionada a malha ($1 \times 40 \times 40$) por possuir a melhor relação entre qualidade e tempo computacional. São apresentados também resultados obtidos na malha ($1 \times 20 \times 20$) de modo a poder comparar a qualidade do *design* das microestruturas, e averiguar a presença ou não de dependência da malha. Serão apresentadas várias tabelas com os resultados expostos, cada uma composta por um caso de carga e pelas respetivas microestruturas quando sujeitas a diferentes estratégias de filtragem de sensibilidades e designs iniciais. Para cada caso é apresentado o valor da função objetivo inicial $F_{OBJ}^{Inicial}$ e final F_{OBJ}^{Final} . Para o caso da inicialização com uma microestrutura de *design* “Random” é apresentado o melhor resultado de seis otimizações corridas. Com o objetivo de perceber a variância dos resultados da função objetivo a partir deste


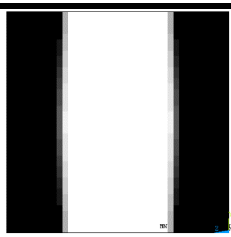
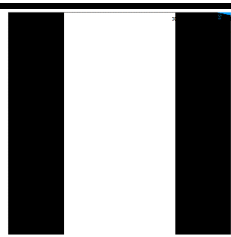
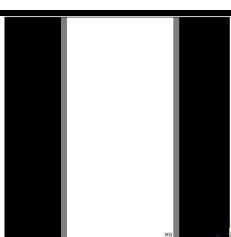
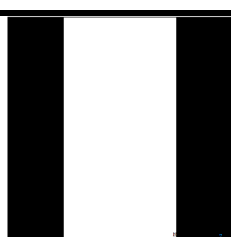
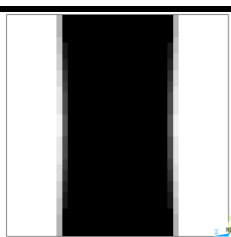
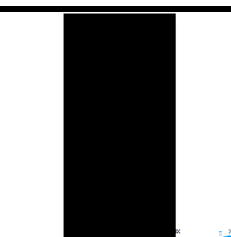
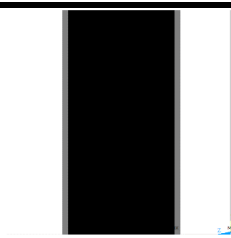
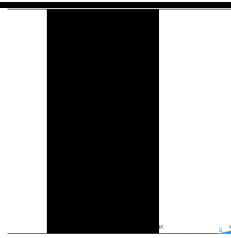
Resultados

design inicial, são também apresentadas as médias da função objetivo inicial e final, $\overline{F_{OBJ}^{Inicial}}$ e $\overline{F_{OBJ}^{Final}}$, respectivamente, e o desvio padrão da solução final σ_{OBJ}^{Final} .

Na tabela 5.1 encontram-se as microestruturas obtidas sujeitas ao caso de tensão **Uniaxial**. Para este caso é possível afirmar que a solução final é independente da microestrutura inicial, pois os valores finais da função objetivo são iguais para o caso de **filtro variável** ($F_{OBJ}^{Final} = 6924.2$ [J]), e bastante parecidos para o caso de **filtro fixo**, e observa-se uma área muito pequena ocupada por regiões cinzentas. Quanto às estratégias de filtragem, é natural observar uma convergência mais eficiente quando usado o **filtro variável**, pois a partir do momento em que o raio deste é inferior a um, o filtro é desativado, ou seja, as densidades de cada elemento deixam de ser afetadas pelas densidades dos elementos da sua vizinhança. No caso do **filtro fixo**, o filtro está sempre ativo, notando-se uma certa variância nos resultados finais da função objetivo.

Observando a disposição do material, conclui-se que em todas as otimizações a microestrutura possui uma ou duas filas de material na vertical, mas o padrão periódico é o mesmo. Isto acontece visto que se trata da maneira mais eficiente de garantir a menor flexibilidade à microestrutura quando esta é sujeita à tração ou compressão na vertical, alinhando o material na direção da carga aplicada, e bastante vulnerável a qualquer outro tipo de estado de carga.

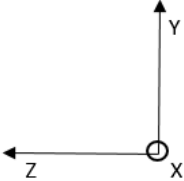
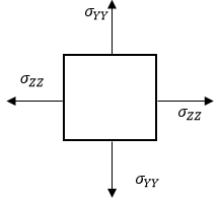
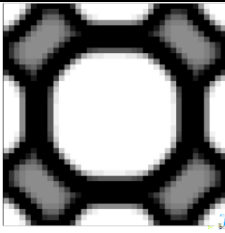
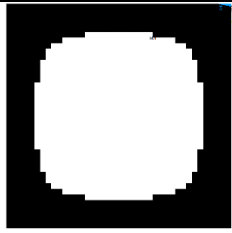
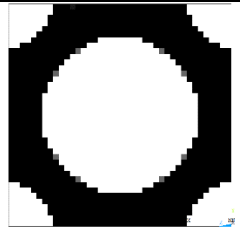
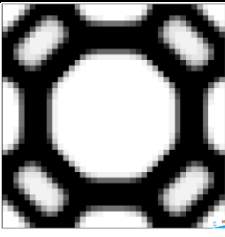
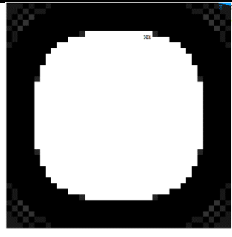
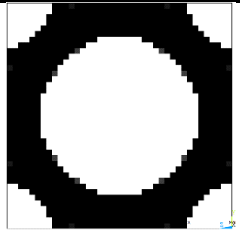

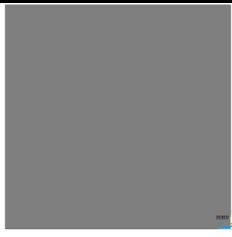
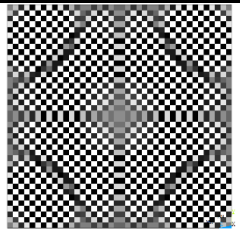
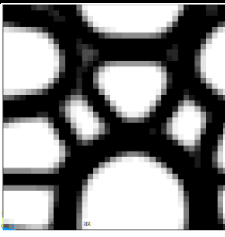
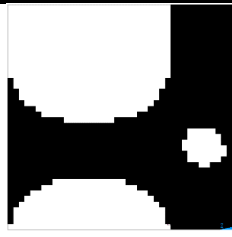
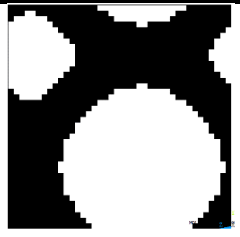
Tabela 5.1 – Representação das topologias ótimas obtidas usando diferentes parâmetros, perante o caso de carga **uniaxial**.

Estado de tensão [MPa]	Inicialização	Filtro Fixo $r_{min} = 1.99$	Filtro Variável $r_{min}^{i+1} = 3.99 - 0.05r_{min}^i$
<p>Uniaxial</p>  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Box Type		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final}	43352 7248.6	43352 6924.2
	Inverted Target		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final}	47984 7248.6	47984 6924.2
	Target		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final}	82404 7243.7	82404 6924.2
	Random		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final*}	557050 7248.6	52471 6924.2
	$\overline{F_{OBJ}^{Inicial}}$	254468.8	160342.5
	$\overline{F_{OBJ}^{Final}}$	7515.9	6924.2
	σ_{OBJ}^{Final}	154.3	0

Resultados

Como se pode observar na tabela 5.2, o estado de tensão **biaxial** é muito mais complexo numericamente que o uniaxial apresentado anteriormente. Isto porque, para cada variação de um determinado parâmetro, seja ele a estratégia de filtro ou *design* inicial, surge uma microestrutura e um valor da função objetivo diferente. Começando por analisar a estratégia de **filtro fixo**, observa-se uma semelhança entre as microestruturas obtidas a partir da célula inicial “**Box Type**” e “**Inverted Target**”, no entanto, esta última possui um valor menor da função objetivo (sabendo que a função objetivo é a minimização da densidade de energia de tensão, quanto menor o valor da função objetivo, melhor o resultado). Isto pode ser relacionado com o facto de na microestrutura obtida a partir da célula inicial “**Box Type**” se observarem bastantes regiões cinzentas. Estas zonas cinzentas, como já explicado no capítulo 3, são zonas que possuem densidades intermédias entre 0 e 1, e indesejáveis em processos de otimização devido à falta de significado físico. Estas são frequentes quando se utiliza esta estratégia de filtro de sensibilidades, pois a densidade dos elementos na fronteira entre a fase sólida e vazio, resultam da média entre estas duas densidades, resultando num valor diferente de 0 e 1. Quanto à célula inicial “**Target**”, a solução acabou por ser uma microestrutura com densidade uniforme de 0.5 em todo o seu domínio para ambas as estratégias de filtragem. Por estranho que possa parecer, é uma solução que não deixa de estar correta, visto que utilizando o método do gradiente, a solução ótima obtida nem sempre é a solução ótima global, e daí o facto de se obter várias soluções diferentes para este caso de carga. A função objetivo torna-se mais instável para este carregamento, levando à existência de um maior número de mínimos locais, e consequentemente, a uma maior dificuldade na obtenção do valor mínimo global da função objetivo e consequente topologia ótima. Para este caso, a otimização a partir da célula inicial “**Random**” foi a que atingiu o melhor valor da função objetivo (24569 *J*), e também o *design* mais peculiar, mas ainda assim eficiente quando comparado com os outros resultados.

Tabela 5.2 - Representação das topologias ótimas obtidas usando diferentes parâmetros, perante o caso de carga **biaxial**.


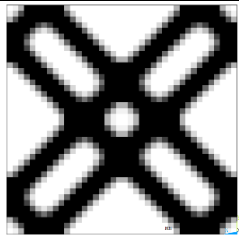
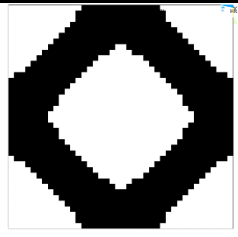
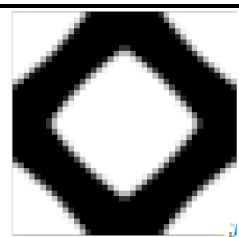
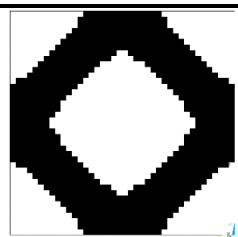
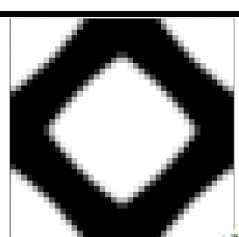
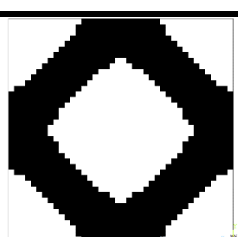
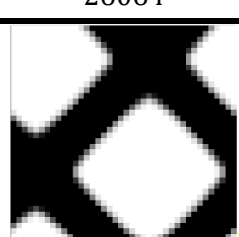
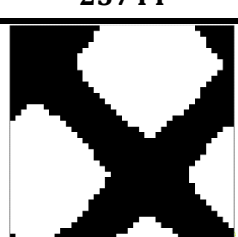
Estado de tensão [MPa]	Inicialização	Filtro Fixo $r_{min} = 1.99$	Filtro Variável	
			$r_{min}^{i+1} = 1.99 - 0.05r_{min}^i$	$r_{min}^{i+1} = 3.99 - 0.05r_{min}^i$
<p>Box Type</p>  <p>Biaxial</p>  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Box Type			
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final}	71470 27018	71470 19035	71470 19190
	Inverted Target			
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final}	86697 25915	86697 20016	86697 19194
	Target			
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final}	146830 77241	146830 77241	146830 26705
	Random			
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final*}	73399 24569	130960 19118	198010 19267
	$\frac{F_{OBJ}^{Inicial}}{F_{OBJ}^{Final}}$	351297.2	192382.4	138950
	$\frac{F_{OBJ}^{Final}}{\sigma_{OBJ}^{Final}}$	24961.4 338.8	20403.8 2467.7	20739 648.2

Resultados

Quanto à estratégia de **filtro variável**, foram usadas duas diferentes para este caso, visto não ter sido possível obter a solução ótima a partir da utilização de $r_{min}^0 = 3.99$. Ambos os filtros funcionam de forma idêntica, ou seja, o filtro possui um raio inicial e este vai decrescendo linearmente a cada iteração no valor de 0.05, sendo a única diferença o valor inicial, onde à esquerda se tem $r_{min}^0 = 1.99$ e à direita $r_{min}^0 = 3.99$. Constata-se que a topologia ótima é obtida através da inicialização **“Box Type”** com $r_{min}^0 = 1.99$, com um valor de $19035J$, sendo esta a melhor de todas as microestruturas apresentadas. As restantes microestruturas possuem valores um pouco acima, não sendo, no entanto, uma diferença muito acentuada, exceto no caso da célula inicial **“Target”**, onde tanto aparece a microestrutura com densidade uniforme, como aparece o padrão *checkerboard* para o caso $r_{min}^0 = 3.99$. O surgimento deste padrão para este caso deve-se simplesmente ao número elevado de iterações ocorridas com o r_{min} inferior a 1, ou seja, com o filtro inativo. Acontece que para esta solução, com o filtro das sensibilidades inativo, o algoritmo atribui densidades de 0 e 1 aos elementos finitos, formando o padrão de xadrez.

Na tabela 5.3 encontram-se as topologias ótimas obtidas quando sujeitas a um caso de carga de corte τ_{yz} . É possível observar que se trata de um caso de carga que leva a obtenção de uma solução consistente, isto é, o *design* de material é praticamente o mesmo em todas as soluções. O material dispõe-se desfasado 45° em relação às direções y e z . Quanto à estratégia de **filtro fixo**, atingiu-se o melhor resultado utilizando a célula inicial **“Random”**. Também a média das seis simulações é um valor inferior ao obtido através das outras inicializações, de onde se pode concluir que se trata numa inicialização consistente para este tipo de carregamento. A solução obtida a partir da célula inicial **“Box Type”** é a pior de todos os casos, tendo também o *design* de material mais distinto de todos os outros. As soluções obtidas a partir das células iniciais **“Target”** e **“Inverted Target”** partilham da mesma solução tanto a nível de microestrutura como de função objetivo. Quanto à estratégia de **filtro variável**, constata-se que todas as soluções possuem melhor valor final da função objetivo do que as soluções obtidas a partir da utilização de **filtro fixo**. As topologias ótimas são iguais para **“Box Type”**, **“Target”** e **“Inverted Target”**. A solução a partir da célula inicial **“Random”** possui apenas uma ligeira diferença tanto a nível de topologia quanto ao valor final da função objetivo, nunca resultando em valores muito afastados dos outros casos.

Tabela 5.3 - Representação das topologias ótimas obtidas usando diferentes parâmetros, perante o caso de carga de **corte**.

Estado de tensão [MPa]	Inicialização	Filtro Fixo $r_{min} = 1.99$	Filtro Variável $r_{min}^{i+1} = 3.99 - 0.05r_{min}^i$
<p>Tensão de Corte</p>  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	Box Type		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final}	239120 29100	239120 23744
	Inverted Target		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final}	268500 26064	268500 23744
	Target		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final}	448370 26064	448370 23744
	Random		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final*}	79971 25848	69897 23837
	$\overline{F_{OBJ}^{Inicial}}$ $\overline{F_{OBJ}^{Final}}$	177541.8 25986.6	369719.4 23927.8
	σ_{OBJ}^{Final}	242.4	59.2

Resultados

Na tabela 5.4 estão representadas as microestruturas e respectivos valores da função objetivo quando sujeitas a um estado de carga **uniaxial** e de **corte**. As topologias das microestruturas revelam ser independentes da célula inicial, visto que o *design* é praticamente o mesmo em todas as situações. Quanto ao *design* de material, é possível observar a formação de retângulos, com o maior comprimento na direção y , dispostos na diagonal. Esta ocorrência é compreensível visto que, sendo o caso de carga **uniaxial** na vertical, é natural haver um forte preenchimento de material que satisfaça uma menor densidade de energia de tensão nessa direção. Combinando com o carregamento de **corte**, o material sofre uma rotação de modo a conferir resistência a este tipo de tensão. Analisando os valores da função objetivo, verifica-se uma vez mais a obtenção de melhores resultados quando usado o **filtro variável** em relação ao **filtro fixo**, havendo uma diferença de relativamente 4000 J .

Tabela 5.4 -- Representação das topologias ótimas obtidas usando diferentes parâmetros, perante o caso de carga **uniaxial** e **corte**.

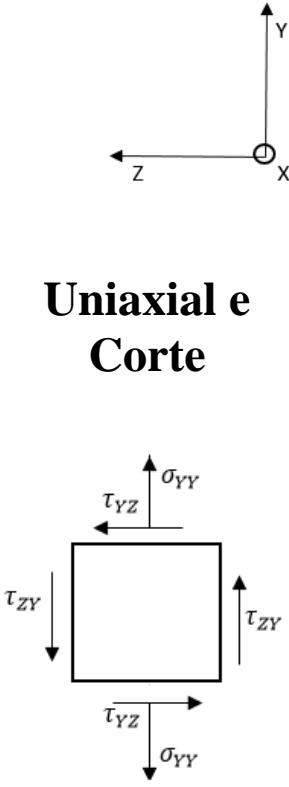
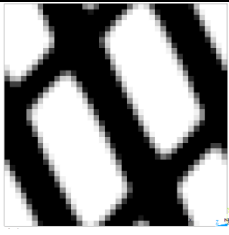
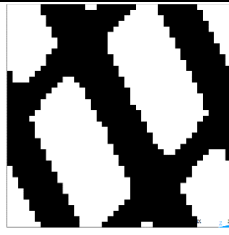
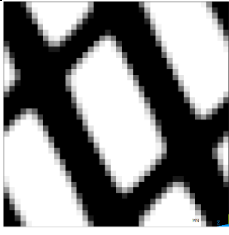

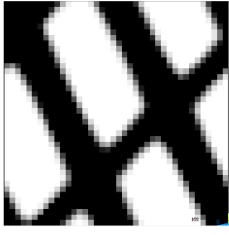

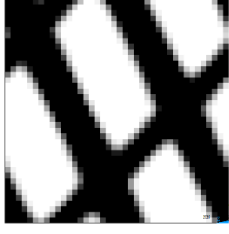

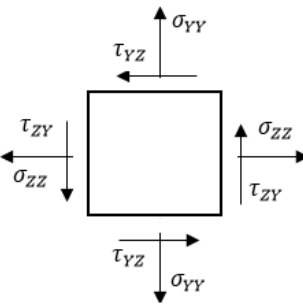
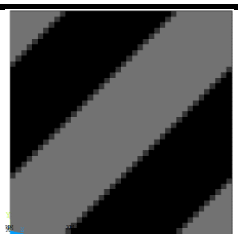
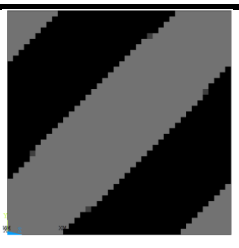




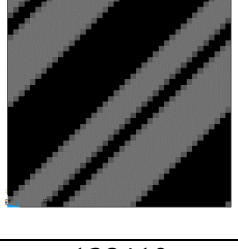
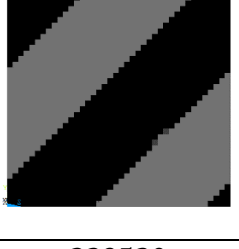
Estado de tensão [MPa]	Inicialização	Filtro Fixo $r_{min} = 1.99$	Filtro Variável $r_{min}^{i+1} = 3.99 - 0.05r_{min}^i$
<p>Uniaxial e Corte</p>  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	Box Type		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final}	282470 37099	282470 32956
	Inverted Target		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final}	316490 37104	316490 33014
	Target		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final}	530780 37125	530780 32982
	Random		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$ F_{OBJ}^{Final*}	2420800 37080	76649 32922
	$\overline{F_{OBJ}^{Inicial}}$ $\overline{F_{OBJ}^{Final}}$	1606418 37413.2	228827.8 37698.8
	σ_{OBJ}^{Final}	450.1	5735.3

Tabela 5.5 - Representação das topologias ótimas obtidas usando diferentes parâmetros, perante o caso de carga **biaxial e corte**.

Estado de tensão [MPa]	Inicialização	Filtro Fixo $r_{min} = 1.99$	Filtro Variável $r_{min}^{i+1} = 3.99 - 0.05r_{min}^i$
<p>Biaxial e Corte</p>  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	Box Type		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$	39173	39173
	F_{OBJ}^{Final}	25641	25362
	Inverted Target		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$	59868	59868
	F_{OBJ}^{Final}	25641	25273
	Target		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$	59520	59520
	F_{OBJ}^{Final}	25641	25361
	Random		
	$F_{OBJ}^{Inicial}$	128410	339520
	F_{OBJ}^{Final*}	25774	25273
	$\frac{F_{OBJ}^{Inicial}}{F_{OBJ}^{Final}}$	320632.5	1470550
	$\frac{F_{OBJ}^{Final}}{\sigma_{OBJ}^{Final}}$	25286	25273
	σ_{OBJ}^{Final}	0	0

Na tabela 5.5 encontram-se dispostos os resultados das microestruturas referentes à minimização da flexibilidade quando sujeitas ao caso misto de tensão **biaxial** e de **corte**. Olhando para a tabela nota-se imediatamente uma diferença nas microestruturas comparando com os casos previamente apresentados. Em todos os outros estamos perante um material compósito poroso, isto é, com uma fase sólida (preto) e uma fase vazia (branco). No entanto, o processo de otimização revelou ser bastante complexo para este estado de carga. Tal facto pode dever-se à topologia da microestrutura, que apresenta a fase sólida desconexa entre si. Com vista à resolução deste problema, introduziu-se uma densidade à fase vazia, ficando o compósito com duas fases sólidas. Uma fase com densidade $\rho = 1$ (preta) e outra fase com densidade $\rho = 0.56$ (cinzento). Esta densidade obtém-se definindo um rácio entre a rigidez dos dois materiais de $\frac{E^1}{E^2} = 0.1$, e através da equação (3.1), tem-se $\rho = 0.56$. Assim sendo, o volume de material foi aumentado de $V^* = 0.5 \times 1$, em que 0.5 representa a fração volúmica e 1 a densidade do material, para $V^* = 0.5 \times 1 + 0.1^{0.25} \times 0.5$, onde 0.5 representa a fração volúmica do outro material e $0.1^{0.25}$ a sua respetiva densidade. Realizadas estas alterações, a otimização das microestruturas tornou-se mais estável, sendo possível alcançar resultados bastante consistentes, sendo praticamente indiferente a célula inicial utilizada. A diferença entre as estratégias de filtragem também é muito baixa, o que aconteceu pela primeira vez. Isto pode dever-se ao facto de as densidades dos elementos na fronteira entre os dois materiais estarem sujeitos a uma menor variação de valores, sendo mais estável a convergência.

Na figura 5.1 encontra-se uma representação gráfica de cada caso de carga. Cada gráfico contém o histórico de otimização da melhor solução utilizando **filtro variável** e **filtro fixo**, para os diferentes **estados de tensão**. Ainda que o tamanho dos gráficos não permita ter noção do valor exato da função objetivo, é possível averiguar que nas primeiras vinte iterações o algoritmo reduz em grande parte o nível de flexibilidade da estrutura. As restantes iterações servem para permitir que o algoritmo convirja de forma total para uma solução. Para os casos em que se recorre ao **filtro variável**, a convergência dá-se poucas iterações após a desativação do mesmo, enquanto que utilizando o **filtro fixo**, a solução nunca converge completamente, sofrendo sempre algumas variações. Por esta razão é que é dado um número elevado de iterações (160 iterações) para este problema. Prestando atenção ao caso **biaxial**, observa-se a situação da difícil convergência quando utilizado o **filtro fixo**, como referido anteriormente.

Resultados

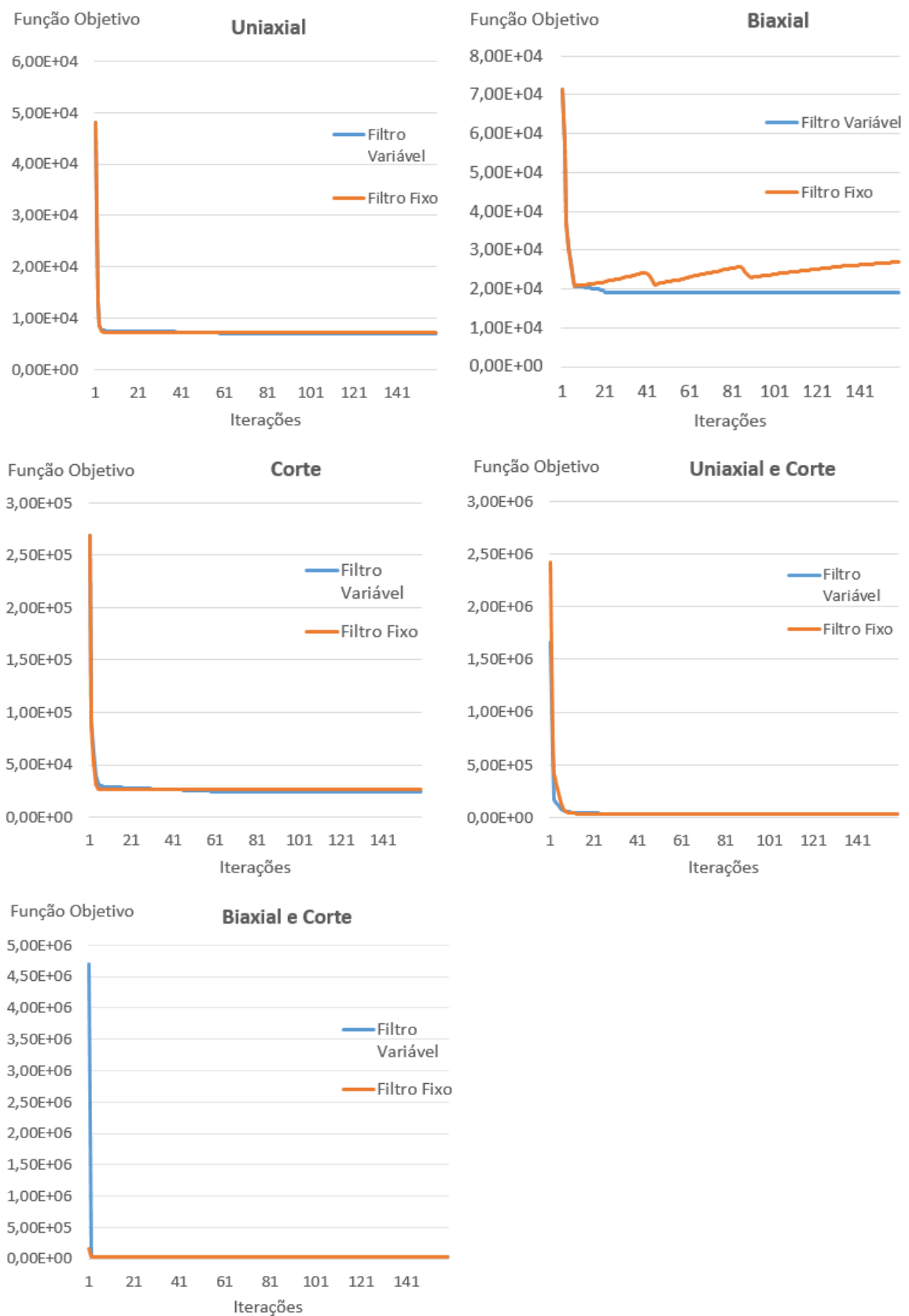


Figura 5.1 – Representações gráficas dos históricos de otimização para o melhor caso de cada carregamento, onde a laranja corresponde ao filtro fixo e a azul ao filtro variável.

De seguida na figura 5.2, pretende-se demonstrar a anisotropia das melhores soluções obtidas para cada caso e respetivos tensores de elasticidade. Apesar de só se considerar o plano yz , o problema trata da otimização no espaço, existindo também rigidez na componente x , e como tal é apresentado o tensor da rigidez E_{ijkl}^H na forma geral 6×6 , e uma ilustração gráfica da anisotropia a duas e a três dimensões.

No caso **biaxial** é natural surgirem valores elevados e iguais das componentes axiais do tensor de elasticidade E_{2222}^H e E_{3333}^H (102.13 [MPa]), pois o problema tem como objetivo a minimização da flexibilidade quando sujeito às tensões nessas mesmas direções. Das cinco microestruturas, é a que apresenta o menor grau de anisotropia, tratando-se mesmo de um estado de simetria cúbica.

Para o caso de **corte**, a componente de corte E_{2323}^H é bastante superior ao caso anterior, pois é o aumento desta que permite a redução da flexibilidade quando sujeita à tensão τ_{yz} .

Para o caso de estado de tensão **uniaxial** e **corte**, repara-se no maior valor da componente E_{2222}^H em relação a E_{3333}^H , isto porque a tensão é aplicada na direção y (22). Também a componente E_{2323}^H é maximizada, mas não tanto quanto E_{2222}^H .

Quanto ao estado **uniaxial** verifica-se a existência de rigidez apenas na direção y , onde a componente E_{2222}^H tem o valor de 158.7 [MPa] e o valor de E_{3333}^H é nulo. Este caso apresenta também o nível de anisotropia mais elevado com $\mathcal{A} = 0.9359$.

Por último, o caso de tensão **biaxial** e de **corte** apresenta os mesmos valores das componentes axiais E_{2222}^H e E_{3333}^H e também um valor da componente E_{2323}^H relativamente elevado.

Todos estes estados de tensão apresentados não constituem uma grande variedade de estados de tensão, isto porque o valor de cada tensão é sempre 1 MPa. Com vista a testar a influência da variação neste valor, é apresentada na figura 5.3 cinco topologias ótimas obtidas a partir de um tensor aleatório gerado no *software Fortran*. Na figura, é apresentado o tensor gerado, com a respetiva topologia ótima e valores da função objetivo final e inicial. É também apresentada a medida da anisotropia de cada um destes na perspetiva de obter diferentes valores aos anteriormente apresentados.

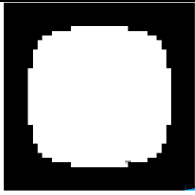
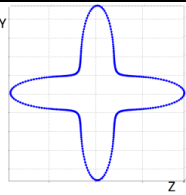
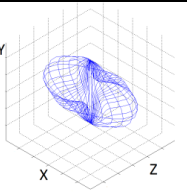
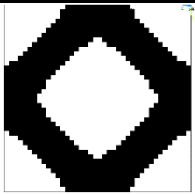
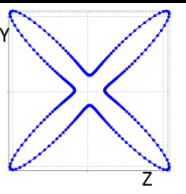
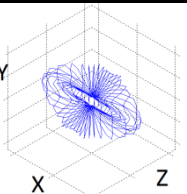
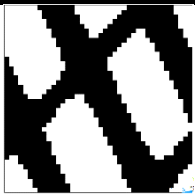
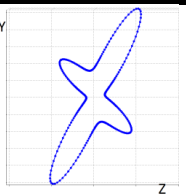
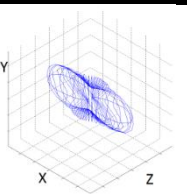
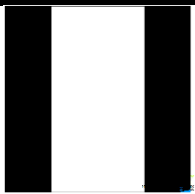
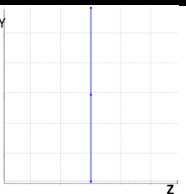
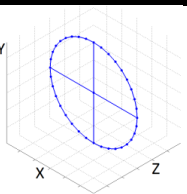
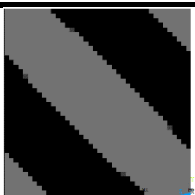
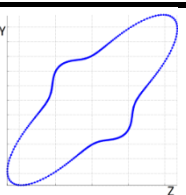
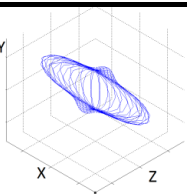
Estado de tensão	Topologia	Tensor E_{ijkl} (Mpa)	2D	3D
Biaxial		$\begin{matrix} 166.18 & 36.27 & 36.27 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 102.13 & 18.77 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 102.13 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 36.58 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 8.92 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 36.58 \end{matrix}$		
	$\mathcal{A} = 0.3445$			
Corte		$\begin{matrix} 133.97 & 27.64 & 27.64 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 48.73 & 43.40 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 48.73 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 28.55 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 34.36 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 28.55 \end{matrix}$		
	$\mathcal{A} = 0.3991$			
Uniaxial e Corte		$\begin{matrix} 163.04 & 42.26 & 19.79 & 0 & 5.77 & 0 \\ \vdots & 103.82 & 37.03 & 0 & 21.90 & 0 \\ \vdots & \dots & 28.94 & 0 & -2.66 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 43.51 & 0 & 7.47 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 32.46 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 23.50 \end{matrix}$		
	$\mathcal{A} = 0.5139$			
Uniaxial		$\begin{matrix} 158.7 & 47.61 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 158.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 55.55 & 0 & 7.47 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{matrix}$		
	$\mathcal{A} = 0.9359$			
Biaxial e Corte		$\begin{matrix} 187.22 & 48.07 & 48.07 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 101.03 & 59.22 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 101.03 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 40.75 & 0 & 20.01 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 49.17 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 40.75 \end{matrix}$		
	$\mathcal{A} = 0.4282$			

Figura 5.2 – Representação da anisotropia de diferentes resultados obtidos e respectivos tensores de elasticidade.




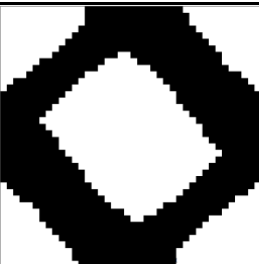
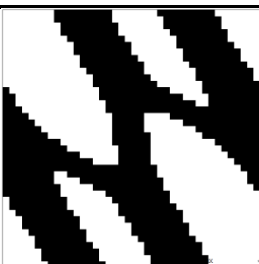
Estado de tensão [MPa]	Topologia	Resultados
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0.37 \\ 0 & 0.37 & 0.34 \end{bmatrix}$		$F_{OBJ}^{Inicial} = 38166$ $F_{OBJ}^{Final} = 4598.2$ $\mathcal{A} = 0.8026$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.40 & 0.27 \\ 0 & 0.27 & 0.64 \end{bmatrix}$		$F_{OBJ}^{Inicial} = 38201$ $F_{OBJ}^{Final} = 0.5976.5$ $\mathcal{A} = 0.5441$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.29 \\ 0 & 0.29 & 0.36 \end{bmatrix}$		$F_{OBJ}^{Inicial} = 25041$ $F_{OBJ}^{Final} = 2951.5$ $\mathcal{A} = 0.5686$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.27 & 0.96 \\ 0 & 0.96 & 0.16 \end{bmatrix}$		$F_{OBJ}^{Inicial} = 224420$ $F_{OBJ}^{Final} = 22373$ $\mathcal{A} = 0.4053$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.88 & 0.54 \\ 0 & 0.54 & 0.48 \end{bmatrix}$		$F_{OBJ}^{Inicial} = 105890$ $F_{OBJ}^{Final} = 0.11972$ $\mathcal{A} = 0.7959$

Figura 5.3 – Ilustração dos diferentes estados de carga obtidos a partir de um tensor aleatório.

Resultados

Para finalizar esta secção, é apresentada na seguinte figura uma comparação das microestruturas obtidas para esta malha, com umas microestruturas obtidas na malha (1x20x20). Para o efeito foram seleccionadas as topologias ótimas de todos os estados de carga, usando a estratégia de filtro fixo e filtro variável.

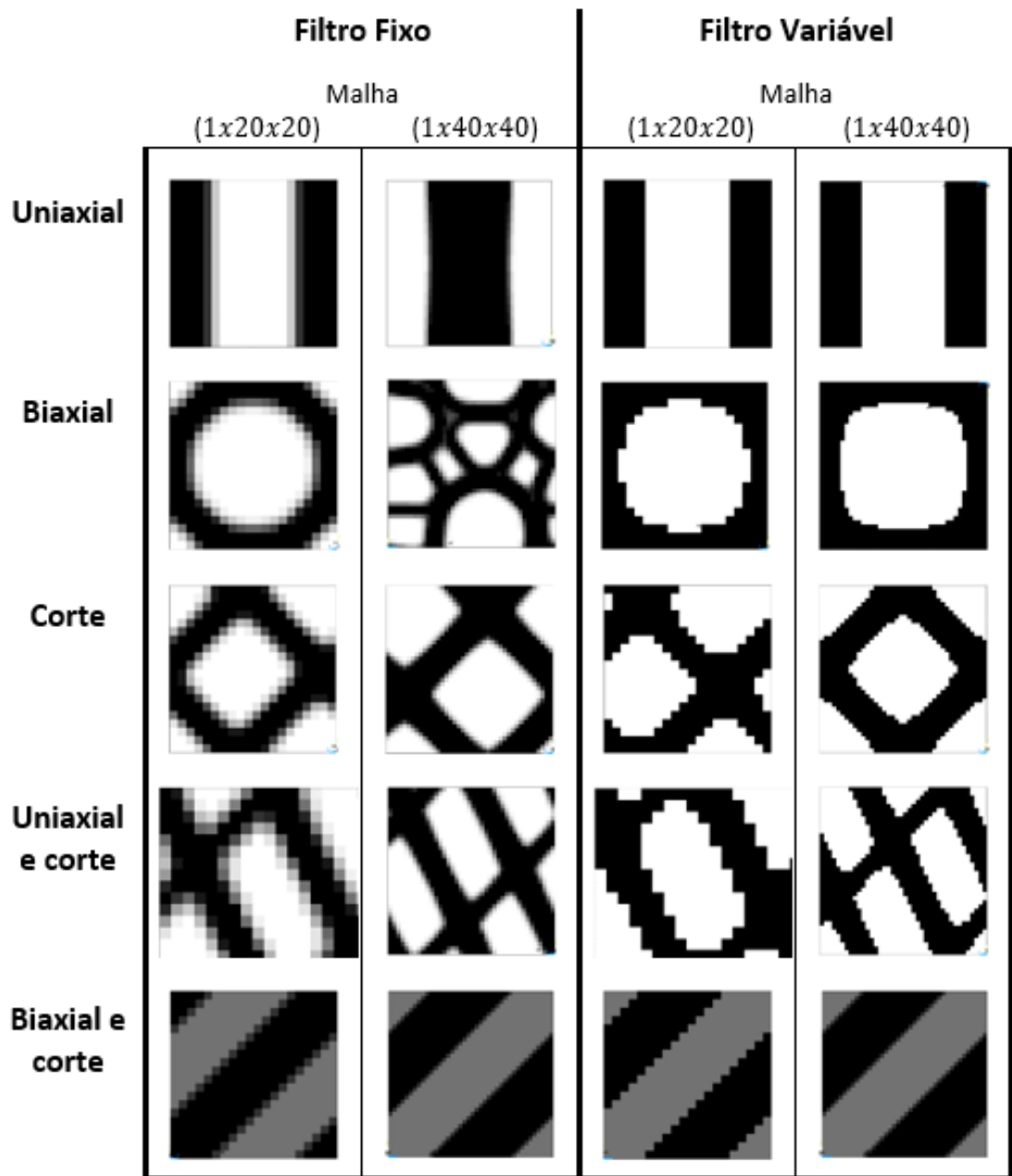


Figura 5.4 – Comparação entre as microestruturas obtidas na malha (1x20x20) com as obtidas na malha (1x40x40)

É possível afirmar que para este problema, a qualidade das soluções é perfeitamente aceitável, pois nota-se uma semelhança em praticamente todas as microestruturas obtidas através das duas malhas. A única diferença que vale a pena considerar encontra-se no caso **biaxial** com **filtro de fixo**, mas como já visto na tabela 5.2, esta deve-se à existência de vários mínimos locais.

5.2 Otimização das propriedades elásticas

Os resultados relativos à otimização das propriedades elásticas de compósitos de microestrutura periódica serão apresentados nesta secção. A ordem pelos quais estes serão dispostos é a mesma em que foram apresentadas as respectivas formulações no capítulo 4.

5.2.1 Propriedades elásticas

Na figura 5.5 seguem-se as microestruturas obtidas através da maximização individual de cada componente longitudinal E_{2222}^H e E_{3333}^H e da componente de corte E_{2323}^H .

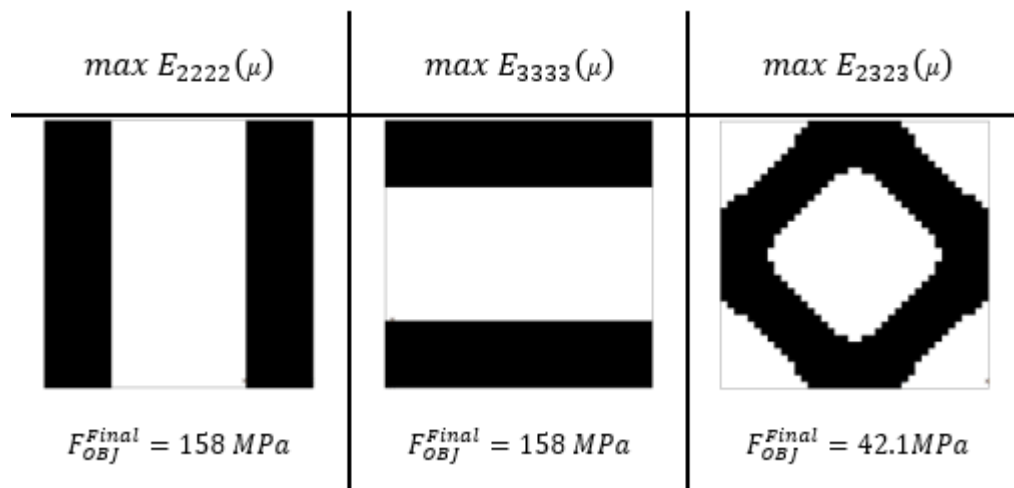


Figura 5.5 – Apresentação das microestruturas e valor da função objetivo final referentes à maximização das componentes E_{2222}^H , E_{3333}^H e E_{2323}^H , sujeitas ao constrangimento de volume máximo.

Resultados

Foi utilizado a inicialização “Box Type” para os dois primeiros casos e a inicialização “Inverted Target” para a otimização da componente E_{2323}^H (módulo de Corte G). Quando ao filtro de sensibilidades, foi utilizada a estratégia de filtro variável para todos os três problemas.

Sendo a função objetivo a maximização das componentes elásticas, esta é dada em [MPa]. Observa-se exatamente o mesmo valor final das componentes longitudinais E_{2222}^H e E_{3333}^H , diferenciando somente a orientação do material. O valor ótimo da função objetivo quando maximizada a componente E_{2323}^H é bastante inferior aos outros dois. Na próxima tabela estão representados os tensores E_{ijkl}^H obtidos neste problema. Na seguinte figura é apresentado o histórico de otimização da componente elástica E_{2222}^H .

Função objetivo

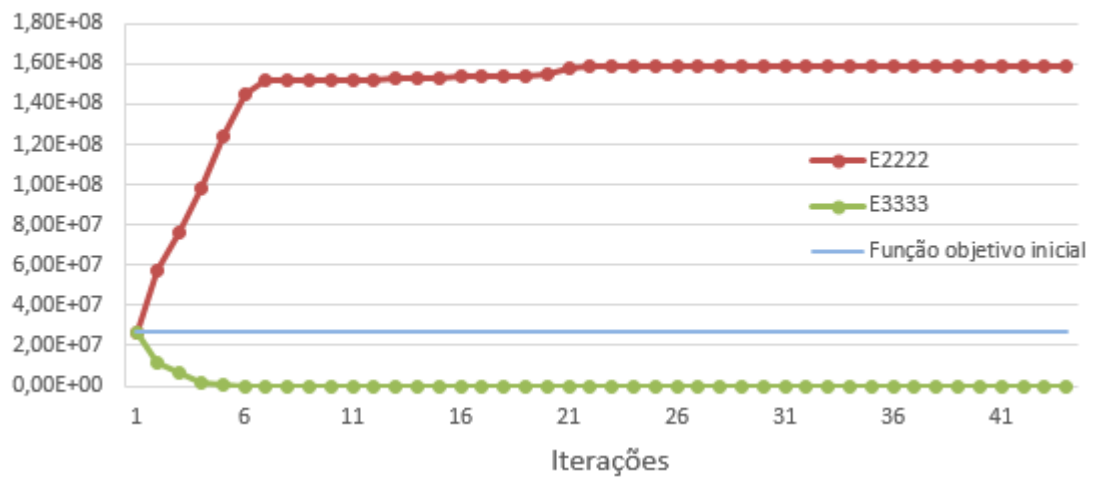


Figura 5.6 -Histórico de otimização da componente elástica E_{2222}^H

Inicialmente as componentes elásticas E_{2222}^H e E_{3333}^H apresentam o mesmo valor devido a natureza da célula inicial. No entanto, logo após a primeira iteração, a componente E_{2222}^H é otimizada em direção ao valor máximo de 158 MPa, enquanto que a componente E_{3333}^H converge para um valor muito reduzido próximo de zero.

Tabela 5.6 – Tensores finais E_{ijkl}^H com coeficientes respeitantes ao plano yz E_{2222}^H , E_{3333}^H e E_{2323}^H .

$\max E_{2222}(\mu)$ [MPa]	$\max E_{3333}(\mu)$ [MPa]	$\max E_{2323}(\mu)$ [MPa]
$\begin{bmatrix} \mathbf{158} & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 2.54 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dots & \mathbf{158} & 0 \\ \dots & \dots & 2.54 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 67.1 & 52.5 & 0 \\ \dots & 67.1 & 0 \\ \dots & \dots & \mathbf{42.1} \end{bmatrix}$

Na tabela 5.7 apresentam-se os resultados correspondentes ao problema da maximização das duas componentes longitudinais em simultâneo. Para esta formulação foi utilizada a célula inicial “Box Type” e filtro de sensibilidades variável. Observando o histórico de otimização, verifica-se que o valor das componentes E_{2222}^H e E_{3333}^H se mantêm iguais desde a primeira iteração até à última. Isto porque o *design* inicial é tal que o valor destas componentes é igual, e como a função objetivo é a maximização da soma de ambas, o problema converge naturalmente para uma solução com as duas constantes maximizadas e iguais.

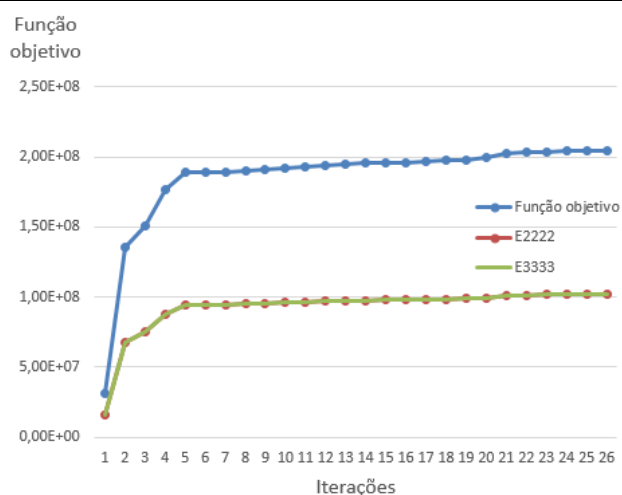
Tabela 5.7 – Representação da topologia ótima, valor objetivo final, histórico de otimização e do tensor final de elasticidade do problema da maximização simultânea das componentes E_{2222}^H e E_{3333}^H .

$$\max_{\mu} E_{2222}(\mu) + E_{3333}(\mu)$$

$$\text{sujeito a: } V \leq V_{max}$$



$$F_{OBJ}^{Final} = 204 \text{ [MPa]}$$



$$\begin{bmatrix} 102 & 18.5 & 0 \\ \dots & 102 & 0 \\ \dots & \dots & 8.5 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

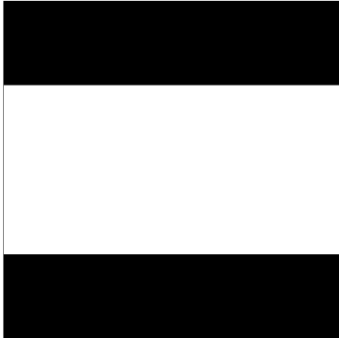
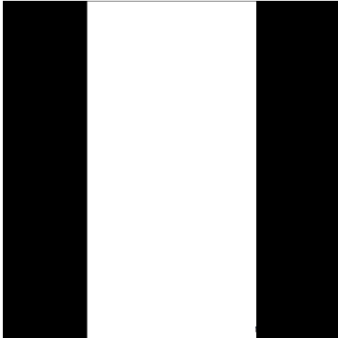
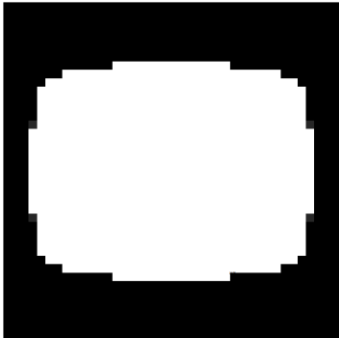
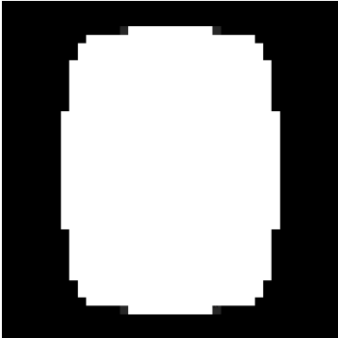
Resultados

Destes problemas apresentados, constata-se que as microestruturas ótimas obtidas são idênticas às topologias ótimas do problema da minimização da densidade de energia para os casos de carga uniaxial, biaxial e de corte. Faz sentido que assim seja pois, por exemplo, quando se minimiza a *compliance* quando sujeita a um estado de carga uniaxial σ_{22} , a componente elástica E_{2222}^H é maximizada.

Com o fim de demonstrar a influência dos pesos utilizados na função objetivo, é apresentada na tabela 5.8 os resultados referentes ao problema formulado na equação (4.22). Para este problema foi utilizada a célula inicial “Box Type” e a estratégia de filtro variável.

Verifica-se que é necessário ter algum cuidado ao usar pesos diferentes para as diferentes componentes da função objetivo. Tal acontece, pois, ao atribuir um peso w_i demasiado elevado a uma componente em relação a uma outra, a função objetivo irá somente otimizar essa mesma, desvalorizando a componente com um peso mais baixo. Isto observa-se quando se definiram os pesos $w_1 = 0.2$ e $w_2 = 0.8$ e vice-versa. Quando a diferença entre estes é menor, a otimização corre de forma satisfatória apresentando resultados consistentes. Tomando em atenção o caso de $w_1 = 0.6$ e $w_2 = 0.4$, por exemplo, verifica-se um valor superior da constante elástica E_{2222}^H em relação à constante E_{3333}^H . Quanto ao *design* de material, existe uma maior concentração de material na vertical, devido ao maior valor de E_{2222}^H do que na horizontal.

Tabela 5.8 – Resultados referentes ao problema da maximização de $w_1 E_{2222} + w_2 E_{3333}$ com constrangimento de volume.

$\max_{\mu} w_1 E_{2222} + w_2 E_{3333}$ sujeito a $V \leq V_{max}$	
$w_1 = 0.2 \quad w_2 = 0.8$ 	$w_1 = 0.8 \quad w_2 = 0.2$ 
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dots & 158.7 & 0 \\ \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$ [MPa]	$\begin{bmatrix} 158.7 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$ [MPa]
$w_1 = 0.4 \quad w_2 = 0.6$ 	$w_1 = 0.6 \quad w_2 = 0.4$ 
$\begin{bmatrix} 69.7 & 15.4 & 0 \\ \dots & 128.4 & 0 \\ \dots & \dots & 5.8 \end{bmatrix}$ [MPa]	$\begin{bmatrix} 128.4 & 15.4 & 0 \\ \dots & 69.7 & 0 \\ \dots & \dots & 5.8 \end{bmatrix}$ [MPa]

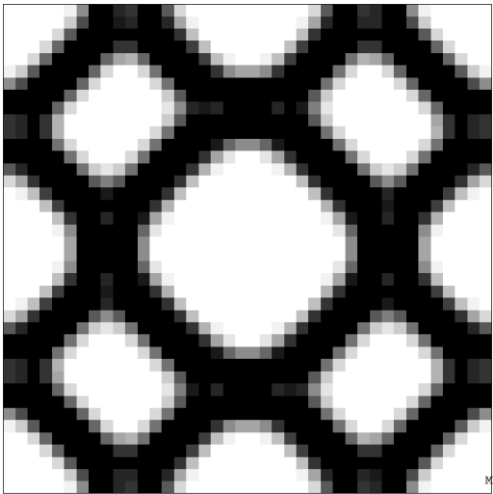
Na tabela 5.9, são apresentados os resultados da maximização do módulo de compressibilidade K . São apresentadas duas versões, uma onde é utilizado a estratégia de filtro de sensibilidades fixo e outra variável. Isto porque este problema origina frequentemente o padrão *checkerboard* quando utilizada esta última estratégia. Para ambas otimizações foi utilizada a célula inicial “Box Type”.

Resultados

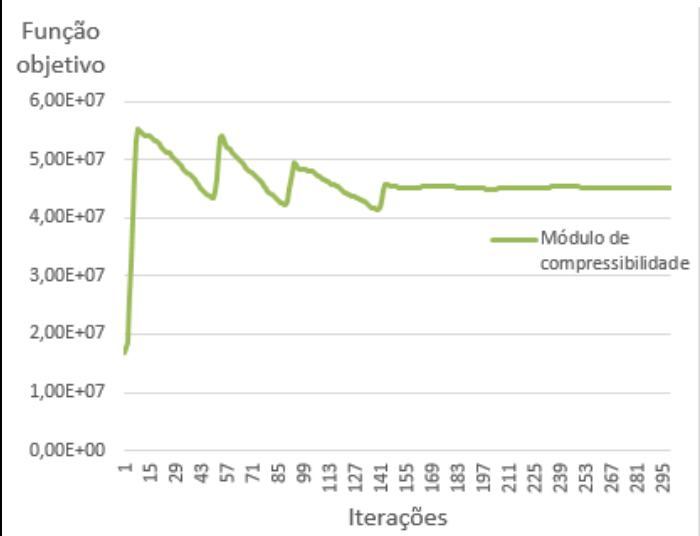
Tabela 5.9 – Resultados da maximização do módulo de compressibilidade com
constrangimento de volume, utilizando filtro fixo

$$\max_{\mu} K$$

sujeito a: $V \leq V_{max}$



$$F_{OBJ}^{Final} = 45.1 \text{ MPa}$$



$$\begin{bmatrix} 50.8 & 39.3 & 5.4 \times 10^{-3} \\ \dots & 50.8 & -6.7 \times 10^{-3} \\ \dots & \dots & 20.5 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

A topologia ótima possui um *design* de material distinto de todas as microestruturas já apresentadas. Esta contém umas regiões cinzentas típicas da utilização de filtro fixo ao longo de toda a otimização. Olhando para o gráfico que relaciona o módulo de compressibilidade a cada iteração, verifica-se um aumento acentuado inicial. Após o pico, o valor diminui de forma irregular até estabilizar no valor de 45,1 [MPa] a partir da iteração 150 sensivelmente.

Para facilitar a visualização da microestrutura, é apresentada na figura 5.7 a mesma microestrutura repetida no plano yz . Para tal, foram filtradas as densidades intermédias, de modo a obter somente densidades 0 e 1, eliminando as regiões cinzentas existentes na célula unitária presente na tabela 5.9.

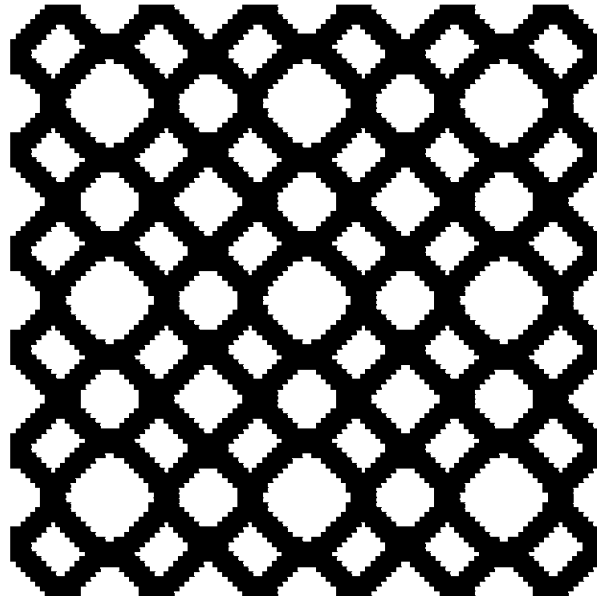


Figura 5.7 – Microestrutura ótima obtida através do problema da maximização do módulo de compressibilidade K com constrangimento de volume, repetida no plano yz 3×3 .

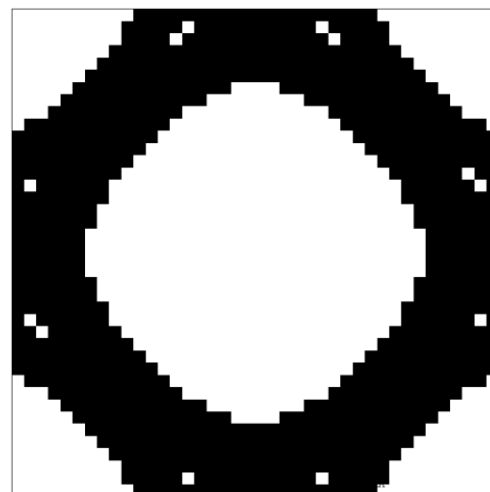
Na tabela 5.10 é apresentado exactamente o mesmo problema ao anterior, mas com utilização do filtro de sensibilidades variável. Comparando com a microestrutura do outro problema, esta possui uma distribuição de material mais regular, com a inexistência das regiões cinzentas. No entanto, observa-se o aparecimento de alguns elementos sem densidade dentro da área de material rígido. O processo de otimização é bem mais estável, havendo um aumento do módulo de compressibilidade consistente até à sua convergência para o valor de 60.7 [MPa]. Este é um valor superior ao alcançado no problema da maximização de K com o filtro fixo, sendo este um acontecimento normal como já provado na secção 5.1 desta dissertação.

Resultados

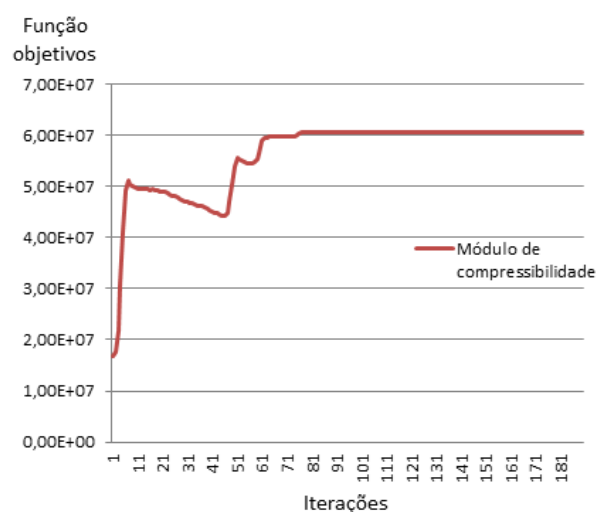
Tabela 5.10 - Resultados da maximização do módulo de compressibilidade K com constrangimento de volume, utilizando filtro variável.

$$\max_{\mu} K$$

sujeito a: $V \leq V_{max}$



$$F_{OBJ}^{Final} = 60.7 \text{ [MPa]}$$



$$\begin{bmatrix} 71.9 & 49.4 & -3.4 \times 10^{-2} \\ \dots & 71.9 & -4.3 \times 10^{-3} \\ \dots & \dots & 26.7 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

Da mesma forma, é apresentada também uma repetição desta microestrutura no plano yz na figura 5.8. Ignorando o aparecimento dos poucos elementos sem densidade, é possível afirmar que se está perante a microestrutura ótima no que diz respeito a maximização do módulo de compressibilidade.

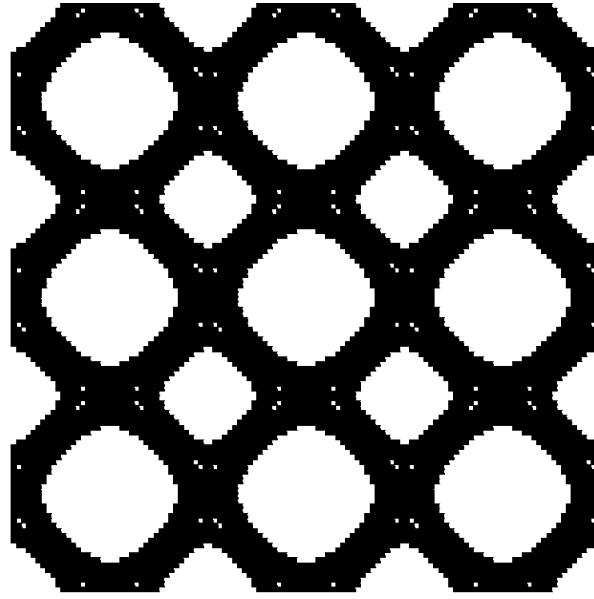


Figura 5.8 - Microestrutura ótima repetida no plano yz 3x3.

5.2.2 Simetria de material

Na tabela 5.11 são apresentados os resultados quanto à maximização da componente elástica do tensor de elasticidade E_{2222}^H , com constrangimentos de volume e de igualdade entre as duas componentes longitudinais E_{2222}^H e E_{3333}^H (formulação 4.28). Neste problema foi usada a célula inicial “Box Type” e a estratégia de filtro variável.

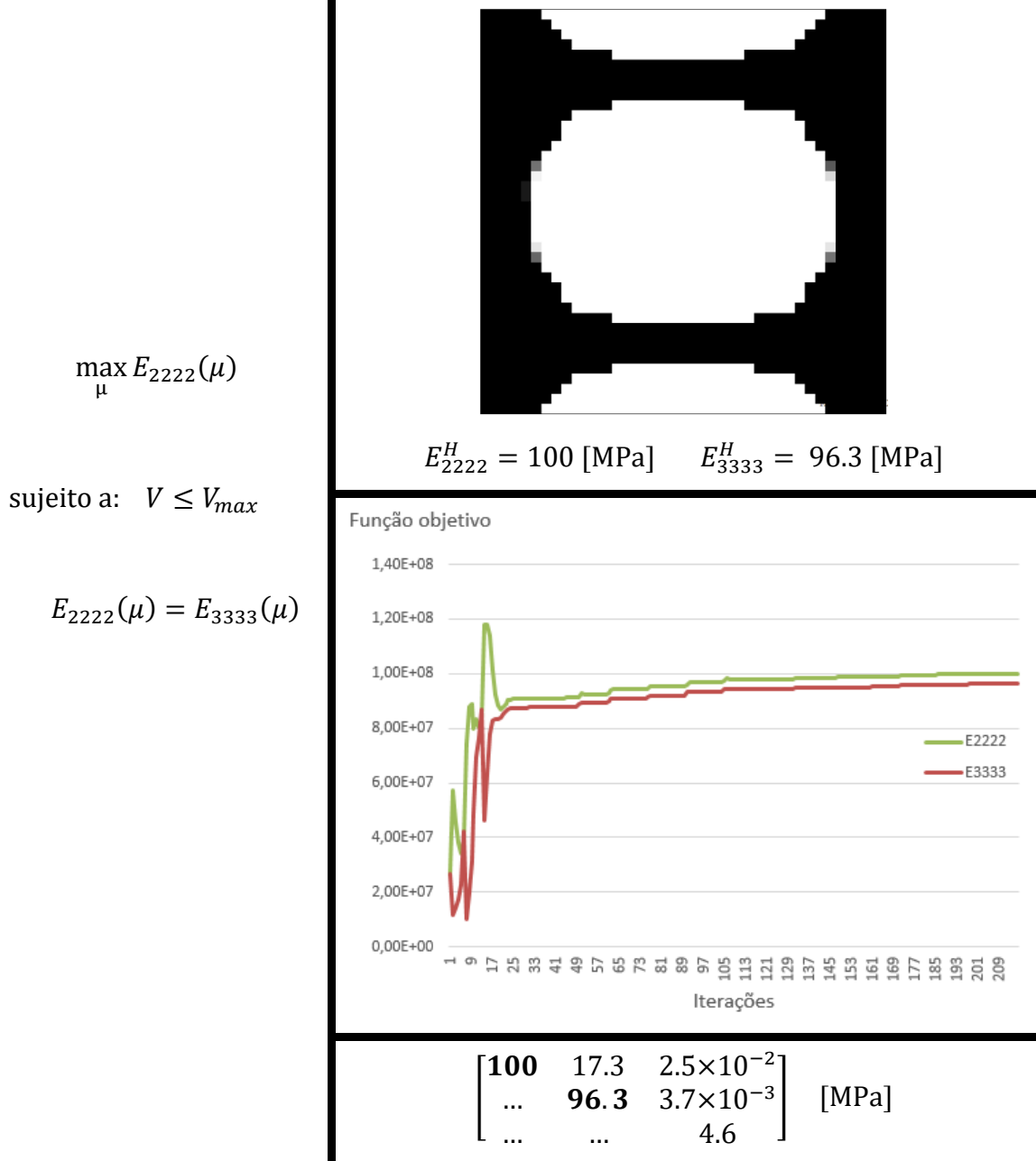
Quanto ao *design* de material da microestrutura, nota-se uma diferença em relação à topologia ótima obtida quando maximizadas ambas as componentes longitudinais. O mesmo se passa com a função objectivo, que comparando a soma das componentes E_{2222}^H e E_{3333}^H , o valor neste caso é ligeiramente inferior (196,3 [MPa]). Olhando para o histórico de otimização, é algo instável visto que a função objetivo é somente a maximização de uma componente elástica, com a restrição de igualdade entre ambas. Para facilitar a convergência, teve que ser atribuída uma tolerância alta ao constrangimento ($\delta = 0.0015$). Segundo a função do constrangimento explicitada na equação (4.29), tem-se:

$$\left(\frac{E_{2222}(\mu)}{E_{3333}(\mu)} - 1 \right)^2 - \delta + 1 \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{100}{96.3} - 1 \right)^2 - 0.0015 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0.999976 \leq 1 \quad (5.1)$$

Resultados

Verifica-se que o constrangimento é perfeitamente satisfeito, tendo sido obtido um valor muito próximo de 1. O erro associado à igualdade entre as duas constantes do tensor elástico é de 3.7%.

Tabela 5.11 – Resultados da maximização da componente E_{2222}^H com constrangimentos de volume e de igualdade entre E_{2222}^H e E_{3333}^H .



Seguidamente apresentam-se os resultados obtidos no problema onde é imposta a simetria ortotrópica. O problema é idêntico ao anterior, no entanto são adicionadas duas restrições de forma a garantir que as componentes E_{2223}^H e E_{3323}^H sejam nulas.

Tabela 5.12 – Resultados de uma microestrutura ortotrópica obtida através da maximização da componente E_{2222}^H com constrangimentos de volume e de ortotropia.

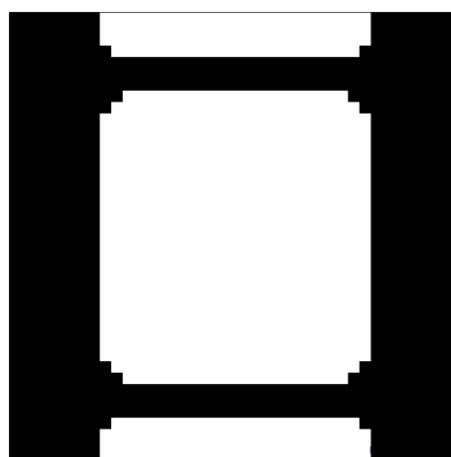
$$\max_{\mu} E_{2222}(\mu)$$

sujeito a: $V \leq V_{max}$

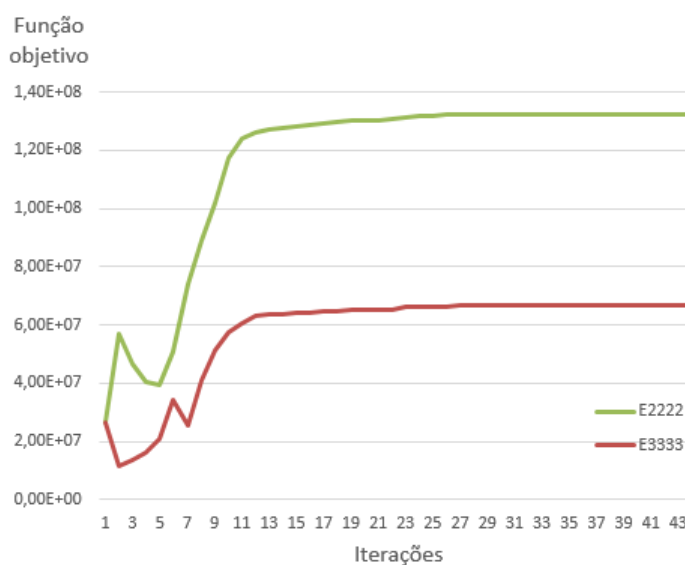
$$E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu)$$

$$E_{2223}(\mu) = 0$$

$$E_{3323}(\mu) = 0$$



$$E_{2222}^H = 132.2 \text{ [MPa]} \quad E_{3333}^H = 66.7 \text{ [MPa]}$$



$$\begin{bmatrix} 132.2 & 17.3 & 0 \\ \dots & 66.7 & 0 \\ \dots & \dots & 1.4 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

Resultados

Para este caso, tal como referido no capítulo 4, foi atribuída uma tolerância superior à restrição $E_{2222}^H = E_{3333}^H$ de modo a garantir uma diferença suficiente entre ambas. O valor desta é $\delta = 1$. Realizando o mesmo cálculo realizado no problema anterior tem-se:

$$\left(\frac{E_{2222}(\mu)}{E_{3333}(\mu)} - 1\right)^2 - \delta + 1 \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{132.2}{66.7} - 1\right)^2 - 1 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0.964324 \leq 1 \quad (5.2)$$

É natural observar que para esta condição o valor da restrição é bem mais inferior que 1, devido à sua tolerância maior. O valor da tolerância para os outros dois constrangimentos é de 0.01. Esta foi uma formulação alternativa utilizada para demonstrar o efeito de uma tolerância mais elevada, visto que na formulação (4.22) se garante automaticamente microestruturas ortotrópicas.

Para o caso de simetria cúbica, os resultados são iguais aos obtidos na tabela 5.7, quando são maximizadas as duas componentes longitudinais do tensor elástico E_{ijkl}^H no plano yz .

Na tabela 5.13 é apresentada a microestrutura isotrópica obtida neste trabalho. Na próxima tabela encontram-se os resultados referentes ao problema (4.39), onde é minimizada a densidade de energia de tensão com funções de penalidade de isotropia. Para esta otimização foi utilizada a célula inicial “Invert Target” e a estratégia de filtro variável. De notar que para estes resultados e todos os resultados em diante, as constantes de Lamé do material base são $\lambda = 0.576923077$ [Pa] e $\mu = 0.34615385$ [Pa]. Visto que o objetivo do problema é a obtenção da isotropia, debaixo da microestrutura ótima apresenta-se o valor desta que é dado por:

$$Isotropia = \frac{E_{2222}^H + E_{3333}^H - 2E_{2233}^H}{4E_{2323}^H} \quad (5.3)$$

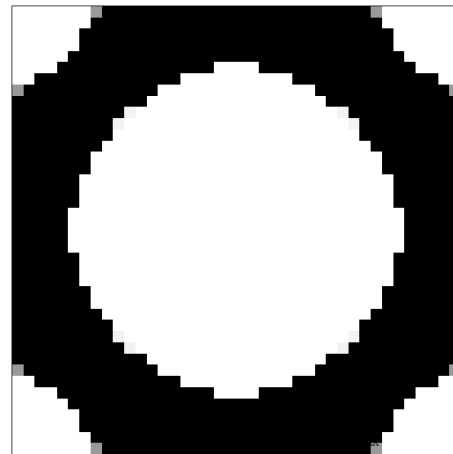
Sabendo que a otimização é só realizada em um quarto da célula unitária, são garantidas as simetrias nos eixos yy e zz , garantindo assim que as componentes E_{2223}^H e E_{3323}^H sejam nulas. Assim a equação *Isotropia* funciona como medidor único da isotropia da microestrutura. O resultado é tanto melhor quanto mais próximo este for do valor 1. Os valores atribuídos aos pesos w_1 e w_2 são 1 e 0.25, respetivamente.

Observando o histórico de otimização, observa-se que inicialmente a convergência aparenta ser instável. No entanto, a partir da décima quinta iteração relativamente, a medida de isotropia aproxima-se do valor 1 regularmente, tendo como valor final 1.0105. Ou seja, o resultado final obtido tem um erro de 1.04% em relação a uma microestrutura isotrópica perfeita.

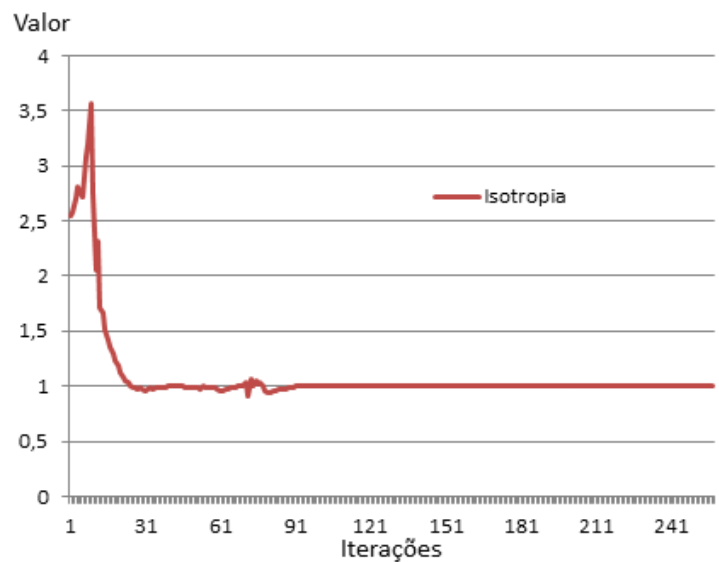
Tabela 5.13 – Resultado do problema de otimização com vista à obtenção de isotropia, através da minimização da compliance com funções de penalidade para um quarto da célula.

$$\min_{\mu} w_1 (f_{objf1}) + w_2 (f_{objf2} + f_{objf3})$$

sujeito a: $V \leq V_{max}$



Isotropia = 1.0105



$$\begin{bmatrix} 0.26 & 0.14 & 0 \\ \dots & 0.26 & 0 \\ \dots & \dots & 0.053 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

Resultados

Para uma melhor visualização da microestrutura isotrópica, é apresentada na figura 5.9 uma repetição desta topologia no plano.

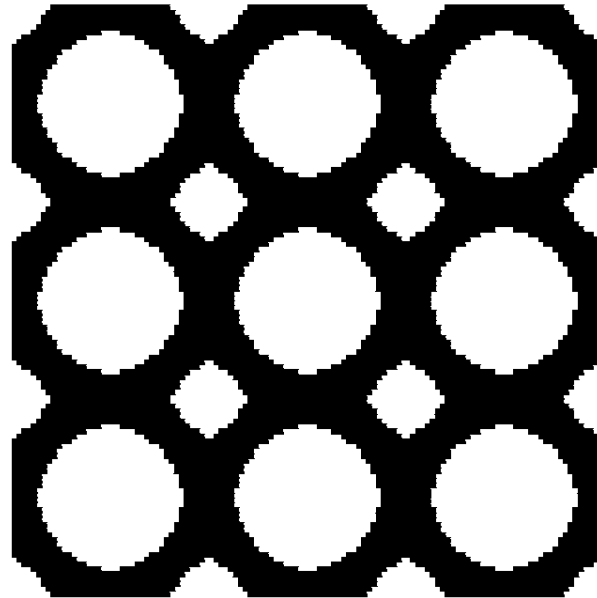


Figura 5.9 – Microestrutura isotrópica repetida no plano yz

Por último, utilizou-se a microestrutura anteriormente apresentada como célula inicial e realizou-se a otimização do problema (4.35) em toda a dimensão da célula.

Como já referido, o problema de otimização com constrangimentos de isotropia foi um trabalho bastante complexo devido à enorme instabilidade do algoritmo em atingir o objetivo a partir de uma microestrutura inicial anisotrópica.

Os resultados apresentados na tabela 5.14 têm como alvo não só comprovar a dificuldade sentida quando aplicados tais constrangimentos em problemas de otimização a partir de células iniciais anisotrópicas, como também aperfeiçoar a isotropia da microestrutura, em que para este caso é de 1.002 (0.2% de erro em relação à topologia isotrópica perfeita).

Tabela 5.14 – Resultados do problema de obtenção de isotropia através da minimização da *compliance* com constrangimentos de volume e de isotropia, para a célula unitária inteira.

$$\min_{\mu} C_{ijkl}^H(\mu) \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl}$$

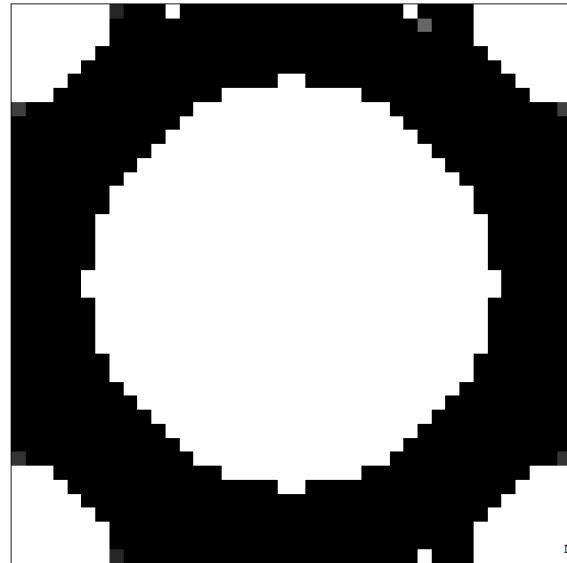
sujeito a: $V \leq V_{max}$

$$E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu)$$

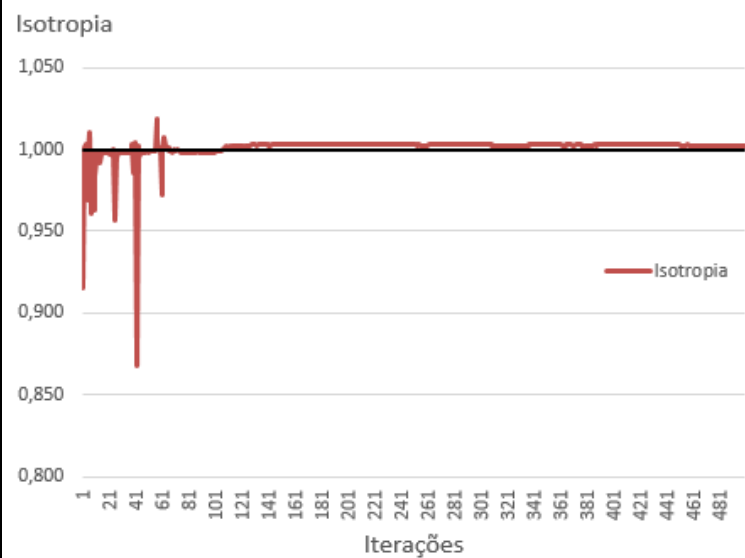
$$E_{2223}(\mu) = 0$$

$$E_{3323}(\mu) = 0$$

$$\begin{aligned} E_{2222}^H + E_{3333}^H - 2E_{2233}^H \\ = 4E_{2323}^H \end{aligned}$$



Isotropia = 1.002



$$\begin{bmatrix} 0.27 & 0.15 & 0 \\ \dots & 0.27 & 0 \\ \dots & \dots & 0.059 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

5.2.3 Minimização do coeficiente de Poisson

Nesta secção são apresentados os resultados relativos à minimização do coeficiente de Poisson. Na tabela 5.15, apresentam-se os resultados referentes ao problema com uma função multiobjetivo onde é minimizada a constante de flexibilidade C_{2323}^H e minimizado o coeficiente de Poisson (equação 4.44). O peso atribuído a cada uma das funções foi de $w_1 = 1$ e $w_2 = 0.061$. A célula inicial utilizada no processo de otimização foi a “Box Type”, e recorreu-se à utilização de filtro fixo de sensibilidades. Com o fim de garantir uma microestrutura auxética simétrica nos dois eixos yy e zz , realizou-se a otimização somente para um quarto da célula unitária.

Como resultado, apresenta-se uma microestrutura auxética, com o valor do coeficiente de Poisson próximo de -0.3 . O histórico de otimização apresenta um valor superior do módulo de corte G em relação ao módulo de compressibilidade K . Na figura 5.10 é apresentada a repetição da microestrutura no plano.

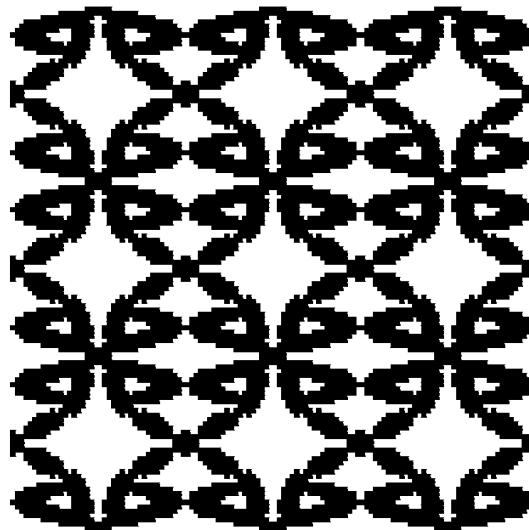
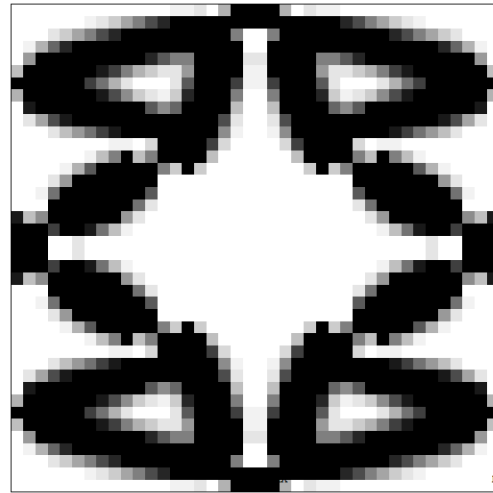


Figura 5.10 - Repetição da microestrutura presente na tabela 5.15

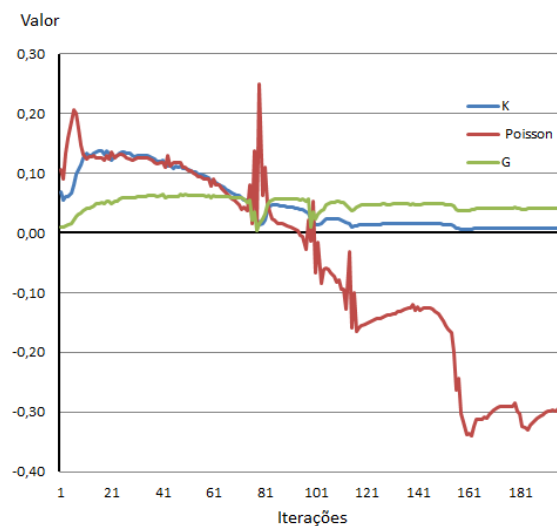
Tabela 5.15 - Resultados obtidos através da minimização da componente C_{2323}^H e de v_{23}^H com constrangimento de volume.

$$\min_{\mu} \left(w_1 f_{objf1} + w_2 f_{objf2} \right)$$

$$\text{sujeito a} \quad V \leq V_{max}$$



$$v_{23}^H = -0.2959$$



$$\begin{bmatrix} 0.02 & -0.01 & 0 \\ \dots & 0.02 & 0 \\ \dots & \dots & 0.04 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

Na tabela 5.16, são apresentados os resultados obtidos resolvendo o problema de otimização na tabela 5.15, mas com o constrangimento de igualdade entre as constantes longitudinais do tensor de elasticidade. No entanto, para esta formulação é utilizado o *design* inicial “Isotrópico”.

Resultados

Observa-se que com a implementação do constrangimento de igualdade entre as duas componentes $E_{2222}(\mu)$ e $E_{3333}(\mu)$, o valor destas é igual e bastante superior aos valores do problema anterior, tanto que, o módulo de compressibilidade K acaba também por ser superior ao módulo de corte G . O design da microestrutura é conhecido na bibliografia, no entanto, apresenta algumas irregularidades, tais como as pequenas zonas de vazio (a branco) dispostas na vertical (ver figura 5.11). O valor do coeficiente de Poisson $\nu_{23}^H = -0.5023$. Do histórico de otimização realça-se apenas uma instabilidade no coeficiente de Poisson (vermelho) entre as iterações 180 e 210, mas que rapidamente converge para o valor final, tal como os módulos de compressibilidade e de corte.

Na seguinte figura é representada a repetição da microestrutura obtida através deste problema no plano yz .

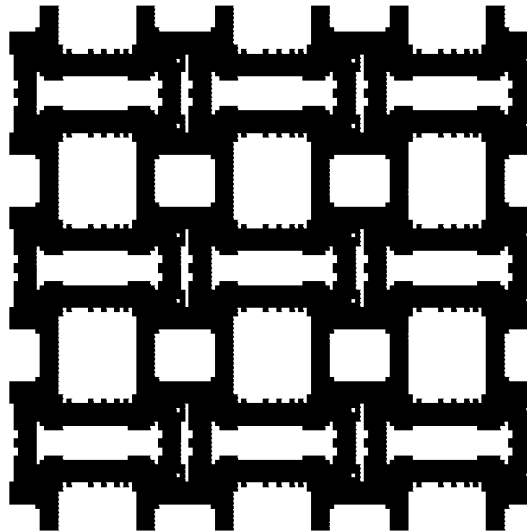


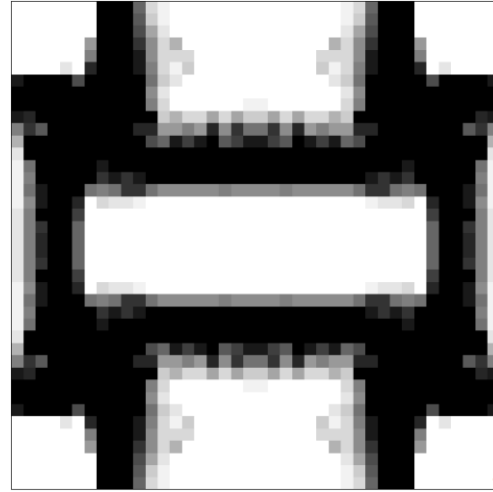
Figura 5.11 – Repetição da microestrutura presente na tabela 5.16 no plano yz .

Tabela 5.16 - Resultados obtidos através da minimização da componente $C_{2323}(\mu)$ e de $v_{23}(\mu)$ com constrangimento de volume e de igualdade entre as componentes $E_{2222}(\mu)$ e $E_{3333}(\mu)$.

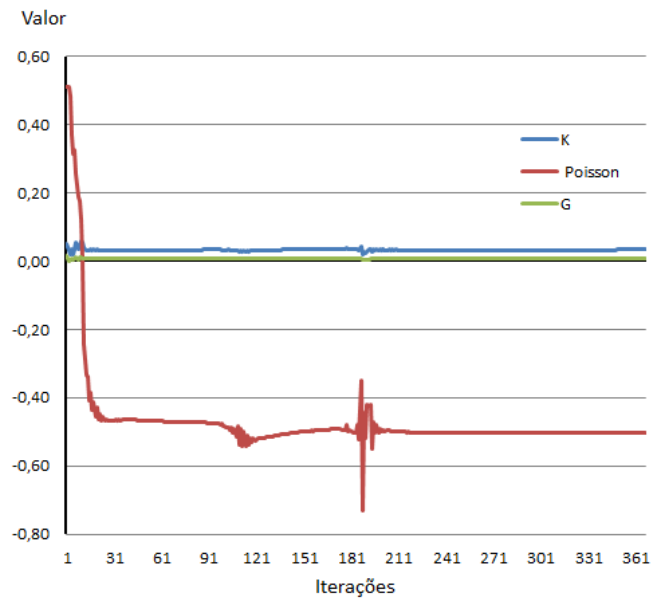
$$\min_{\mu} (w_1 f_{objf1} + w_2 f_{objf2})$$

$$\text{sujeito a } V \leq V_{max}$$

$$E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu)$$



$$v_{23}^H = -0.5023$$



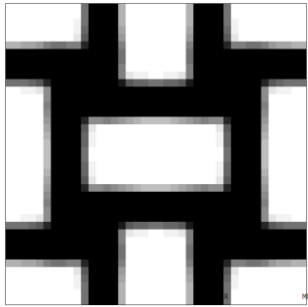

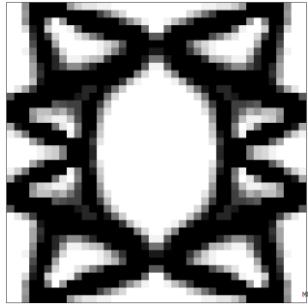
$$\begin{bmatrix} 0.13 & -0.06 & 0 \\ \dots & 0.13 & 0 \\ \dots & \dots & 0.09 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

De seguida, na tabela 5.17, são apresentadas microestruturas obtidas através da minimização do erro entre o tensor homogeneizado E_{ijkl}^H e o tensor alvo definido E_{ijkl}^T . Para este problema, referente ao problema (4.47), serão apresentadas as topologias, as componentes do tensor alvo e o tensor homogeneizado final.

Resultados

Estas simulações são algo instáveis, pois está a ser realizada uma aproximação a um tensor alvo, que por vezes não é possível obter. Para facilitar esta situação, a otimização foi realizada para um quarto da célula, assegurando assim a simetria nos dois eixos. O *design* inicial utilizado foi o “Random” de modo a gerar uma maior variedade de *design* de material das microestruturas. Para todos os casos foi usado a estratégia de filtro fixo das sensibilidades.

Tabela 5.17 – Resultados obtidos através da minimização do erro entre as componentes elásticas alvo definidas e o tensor homogeneizado.

E_{ijkl}^T [PA]	E_{ijkl}^H [PA]	Topologia Ótima
$\begin{bmatrix} 0.18 & -0.14 & \dots \\ \dots & 0.18 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.15 & -0.07 & 0 \\ \dots & 0.15 & 0 \\ \dots & \dots & 0.01 \end{bmatrix}$ <p>$K = 0.04$</p> <p>$G = 0.01$</p>	 <p>$v_{23}^H = -0.4099$</p>
$\begin{bmatrix} 0.06 & -0.027 & \dots \\ \dots & 0.06 & \dots \\ \dots & \dots & 0.04 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.06 & -0.027 & 0 \\ \dots & 0.06 & 0 \\ \dots & \dots & 0.04 \end{bmatrix}$ <p>$K = 0.0165$</p> <p>$G = 0.04$</p>	 <p>$v_{23}^H = -0.8163$</p>
$\begin{bmatrix} 0.06 & -0.036 & \dots \\ \dots & 0.06 & \dots \\ \dots & \dots & 0.043 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.06 & -0.035 & 0 \\ \dots & 0.06 & 0 \\ \dots & \dots & 0.041 \end{bmatrix}$ <p>$K = 0.0125$</p> <p>$G = 0.041$</p>	 <p>$v_{23}^H = -0.5707$</p>

Como se observa, a primeira microestrutura, cujo coeficiente de Poisson $\nu_{23}^H = -0.4099$, é semelhante à microestrutura presente na tabela 5.16 onde também esta contém um módulo de compressibilidade superior ao módulo de corte. As outras duas microestruturas apresentam um design de material original ao até apresentado e visto na bibliografia, tendo uma um valor do coeficiente de Poisson já bastante negativo ($\nu_{23}^H = -0.8163$).

Na figura 5.12 são apresentadas as topologias ótimas do caso anterior quando repetidas no plano yz.

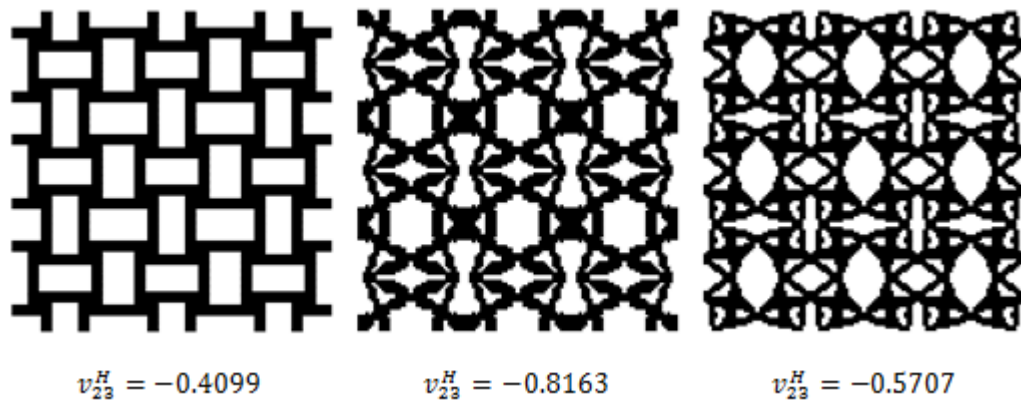


Figura 5.12- Representação das microestruturas obtidas através da minimização do erro entre o tensor alvo e o tensor homogeneizado, repetidas no plano yz.

Na tabela 5.18 é apresentada a topologia ótima quando minimizada a densidade de energia e o coeficiente de Poisson, com restrições de volume e de igualdade entre as componentes elásticas longitudinais E_{2222}^H e E_{3333}^H (equação 4.50). Para este problema, foi utilizada a inicialização “Box Type” e a estratégia de filtro de sensibilidades fixo. Os pesos associados às funções objetivo w_1 e w_2 são 1 e 0.0125, respetivamente.

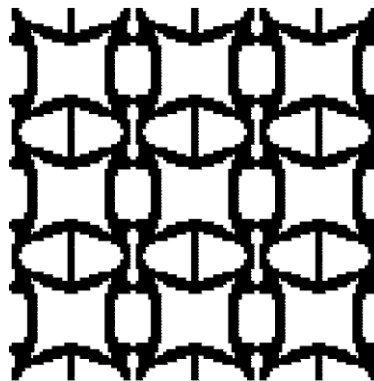


Figura 5.13 - Repetição da microestrutura no plano yz presente na tabela 5.18.

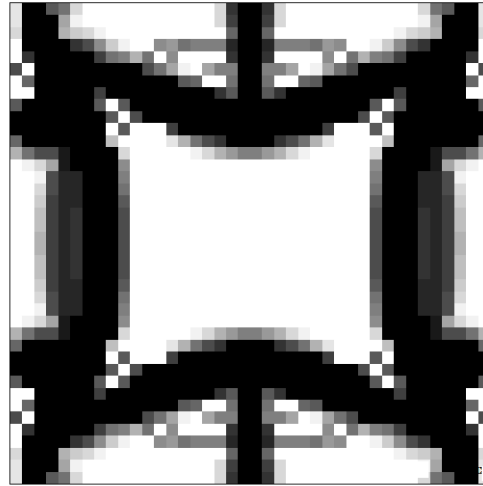
Resultados

Tabela 5.18- Resultados obtidos através da minimização da densidade de energia e do coeficiente de Poisson.

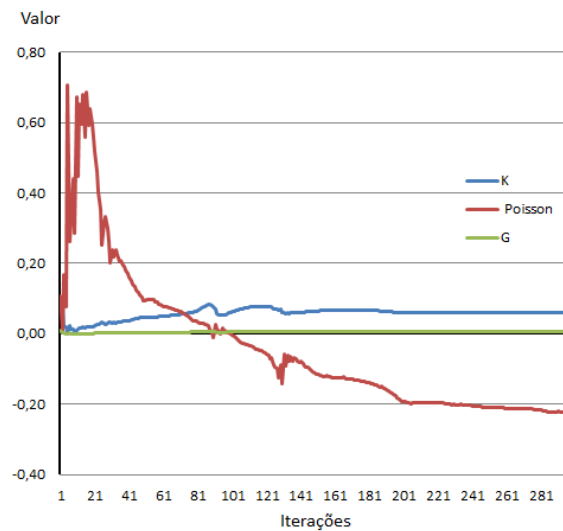
$$\min_{\mu} \left(w_1 f_{objf1} + w_2 f_{objf2} \right)$$

$$\text{sujeito a} \quad V \leq V_{max}$$

$$E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu)$$



$$v_{23}^H = -0.2236$$



$$\begin{bmatrix} 0.153 & -0.029 & 0 \\ \dots & 0.149 & 0 \\ \dots & \dots & 0.006 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

Para esta formulação, observa-se uma microestrutura auxética com um módulo de compressibilidade superior ao módulo de corte. A microestrutura possui alguns elementos com densidade intermédia, no entanto, nota-se pelo histórico de otimização que a convergência é consistente. Na figura 5.13 é apresentada a microestrutura repetida no plano.

Por último, é demonstrado o problema da minimização do coeficiente de Poisson, com constrangimentos de volume, de módulo de compressibilidade mínimo, e de isotropia (equação 4.52). Para este problema foi utilizado a célula inicial “Isotrópica” e

a estratégia de filtro fixo. Na tabela 5.19 são apresentados os resultados referentes as esta formulação.

Tabela 5.19 - Representação dos resultados de uma microestrutura auxética isotrópica, com $aK^* = 0.03$.

$$\min_{\mu} v(\mu)$$

sujeito a $V \leq V_{max}$

$$K(\mu) \geq aK^*$$

$$E_{2222}(\mu) = E_{3333}(\mu)$$

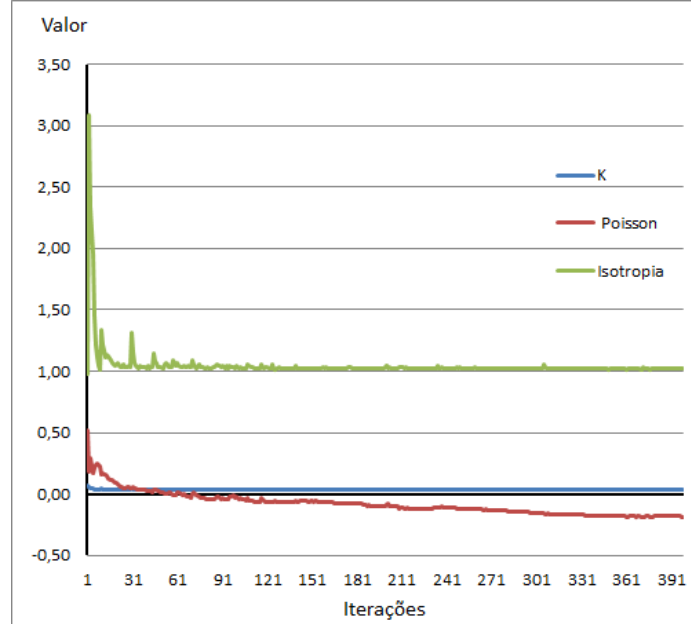
$$E_{2223}(\mu) = 0$$

$$E_{3323}(\mu) = 0$$

$$E_{2222}^H + E_{3333}^H + 2E_{2233}^H = 4E_{2323}^H$$



$$v_{23}^H = -0.1846$$



$$\begin{bmatrix} 0.073 & -0.013 & 0 \\ \dots & 0.073 & 0 \\ \dots & \dots & 0.042 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

Resultados

Como já referido, gerar microestruturas isotrópicas revelou ser uma tarefa bastante complicada, onde neste trabalho teve que se recorrer à utilização de simetrias nos dois eixos do domínio (yy e zz) para assegurar a convergência dos resultados. No problema da otimização com vista à obtenção de microestruturas auxéticas com simetria isotrópica, a dificuldade não foi diferente.

Observando a topologia ótima gerada, compreende-se a enorme instabilidade numérica do problema. Esta, apesar de parecer altamente irregular e com vários elementos de fase sólida dispersos no domínio de material, quando é feita a repetição da microestrutura no plano yz (figura 5.14), é possível notar semelhanças com as microestruturas com coeficiente de Poisson negativo isotrópicas obtidas em Andreassen et al. 2014 figura (5.15).

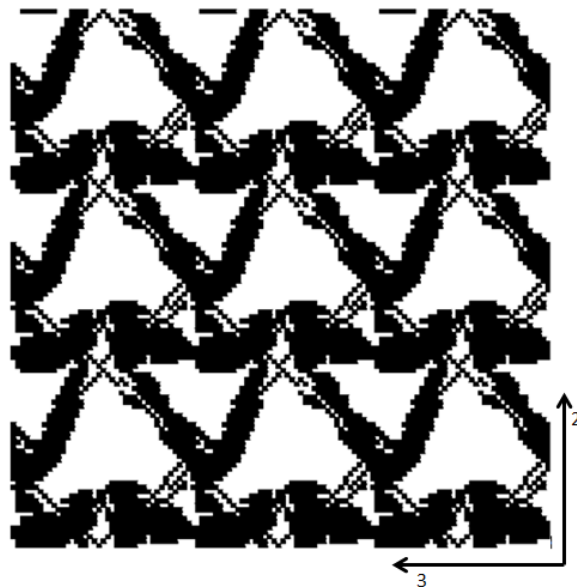


Figura 5.14 – Microestrutura repetida no plano yz obtida através do problema da minimização do coeficiente de Poisson com constrangimentos de volume, de módulo de compressibilidade mínimo e de isotropia.

Na figura 5.14, os “triângulos” estão dispostos na vertical, enquanto que a microestrutura apresentada na figura 5.15 encontram-se na horizontal. O coeficiente de Poisson nesta dissertação é dado por $\nu_{23}^H = \frac{C_{2233}^H}{C_{2222}^H}$, onde no referencial a componente C_{2222}^H se refere à componente da *compliance* na vertical, e daí existir essa diferença perante as microestruturas auxéticas isotrópicas. De resto, observa-se a formação dos “triângulos” com as características semelhantes, sendo possível o comportamento auxético quando sujeito à tração ou à compressão.

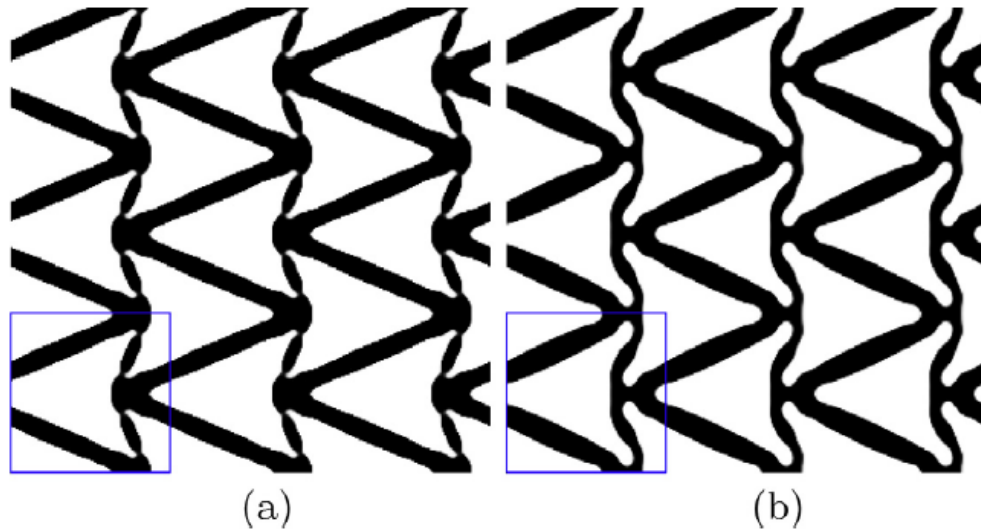


Figura 5.15 - Exemplos de dois tipos de microestruturas auxéticas com simetria isotrópica. Adaptado de (Andreassen et al. 2014).

Constata-se a inexistência dos eixos de simetria, pelo que é impossível adoptar o método anteriormente utilizado na geração de microestruturas isotrópicas. O histórico de otimização revela uma convergência estável em qualquer um dos factores analisados, nomeadamente o módulo de compressibilidade, que rapidamente estabiliza no valor limite definido ($\alpha K^* = 0.03$), o coeficiente de Poisson, que converge de forma quase linear para o seu valor final ($\nu_{23}^H = -0.1846$), e o medidor de isotropia (o mesmo apresentado na equação 5.3), que converge para o valor 1, com as componentes E_{2223}^H e E_{3323}^H a apresentarem um valor muito próximo de zero.

5.3 Efeitos de escala

Nesta secção são apresentados os resultados referentes ao estudo dos efeitos de escala. Para este trabalho foram analisadas três microestruturas com diferentes níveis de anisotropia, de modo a atribuir uma maior diversidade aos resultados. As topologias ótimas e os tensores homogeneizados apresentam-se na tabela 5.20 e 5.21, respetivamente (de referir que na linha do caso Uniaxial e Corte, o sentido na direção z encontra-se ao contrário entre as duas figuras). Estas foram obtidas através do problema tradicional de otimização topológica, onde é minimizada a densidade da energia de tensão, com constrangimento de volume máximo ($V_{max} = 0.5$). Para este estudo foi considerado um material base com módulo de Young $E^0 = 290$ [MPa] e com coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. O rácio de rigidez entre a fase sólida e vazia é $\frac{E_{sólido}}{E_{vazio}} = 10^{12}$.

Devido às limitações numéricas do *Ansys* comercial, não foi possível a realização deste estudo na malha ($1 \times 40 \times 40$), a qual foi trabalhada na otimização das propriedades elásticas. Como tal, o estudo dos efeitos de escala teve que ser realizado na malha ($1 \times 30 \times 30$), onde a variedade das microestruturas acabou por ser reduzida.

Tabela 5.20 – Topologias ótimas obtidas para o estudo dos efeitos de escala


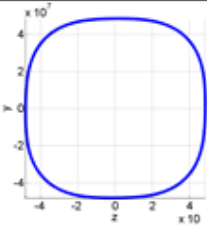

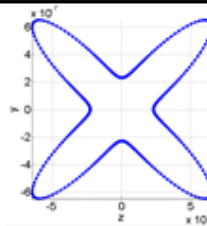

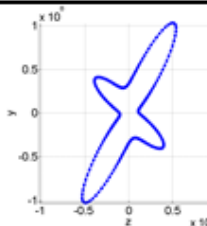
Estado de Carga	Topologia	Anisotropia 2D
Biaxial		 $\mathcal{A} = 0.3493$
Corte		 $\mathcal{A} = 0.3728$
Uniaxial e Corte		 $\mathcal{A} = 0.5312$

Tabela 5.21 – Tensores de elasticidade homogeneizados E_{ijkl}^H referentes às topologias ótimas obtidas, em [MPa].

Biaxial		Corte		Uniaxial e Corte	
$\begin{bmatrix} 75.4 & 43.6 & 0.33 \\ 43.6 & 75.4 & 0.33 \\ 0.33 & 0.33 & 18.3 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 64.1 & 50.9 & 0 \\ 50.9 & 64.1 & 0 \\ 0 & 0 & 41.6 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 101.7 & 36.0 & 23.2 \\ 36.0 & 27.8 & -15.9 \\ 23.2 & -15.9 & 32.0 \end{bmatrix}$	
$v_{23}^H = 0.578$	$v_{32}^H = 0.578$	$v_{23}^H = 0.795$	$v_{32}^H = 0.795$	$v_{23}^H = 1.341$	$v_{32}^H = 0.438$

5.3.1 Ensaio normalizado de Dirichlet

O estudo comparativo entre os coeficientes de Poisson obtidos através da homogeneização e dos ensaios normalizados de Dirichlet é apresentado na presente secção. Os resultados são apresentados sob a forma de gráficos. Estes contam com dois eixos verticais diferentes, onde o eixo à esquerda contém os valores dos coeficientes de Poisson e são exibidos através de gráficos de linhas. O eixo vertical à direita contém o desvio, em percentagem, entre os coeficientes de Poisson homogeneizados ν_{23}^H e ν_{32}^H e os coeficientes obtidos através dos ensaios numéricos ν_{23}^D e ν_{32}^D , e são expostos através de gráficos de colunas. No eixo horizontal encontram-se as $n \times n$ repetições da célula unitária. Para as topologias ótimas sujeitas à carga **Biaxial** e de **Corte**, os valores dos coeficientes de Poisson são iguais, pelo que os seus valores e desvio, são apresentados na mesma linha e coluna, respetivamente. Por sua vez, a topologia ótima sujeita ao estado de carga **Uniaxial e Corte**, possui os valores dos coeficientes de Poisson diferentes entre si, sendo apresentados os resultados para cada coeficiente. O desvio entre os coeficientes homogeneizados e os coeficientes obtidos através da análise numérica é dado por:

$$\text{Desvio [\%]} = \frac{|\nu_{ij}^D - \nu_{ij}^H|}{\nu_{ij}^H} \times 100 \quad (5.4)$$

Nas figuras 5.16, 5.17 e 5.18 são apresentados então os resultados referentes a este estudo, para as topologias ótimas sujeitas aos casos de carga **Biaxial**, **Corte** e **Uniaxial e corte**, respetivamente. Para o caso da microestrutura ótima sujeita ao estado de carga **Biaxial**, observa-se um desvio bastante elevado na análise da célula unitária (1×1), na ordem dos 45%. No entanto, com o aumento das repetições da célula base, o desvio decresce rapidamente para um nível inferior a 15%. A microestrutura ótima sujeita ao caso de **Corte** contém um desvio entre os coeficientes de Poisson inferiores ao caso anterior. O desvio inicial encontra-se abaixo dos 30%, e na repetição (5×5) a diferença entre o coeficiente homogeneizado e o numérico é sensivelmente 6%, apresentando-se como sendo o melhor resultado. Por último tem-se a análise à topologia ótima sujeita à carga **Uniaxial e Corte**. Esta apresenta o maior grau de anisotropia, contendo seis componentes elásticas independentes, e como tal, os valores dos coeficientes de Poisson ν_{23} e ν_{32} são diferentes.

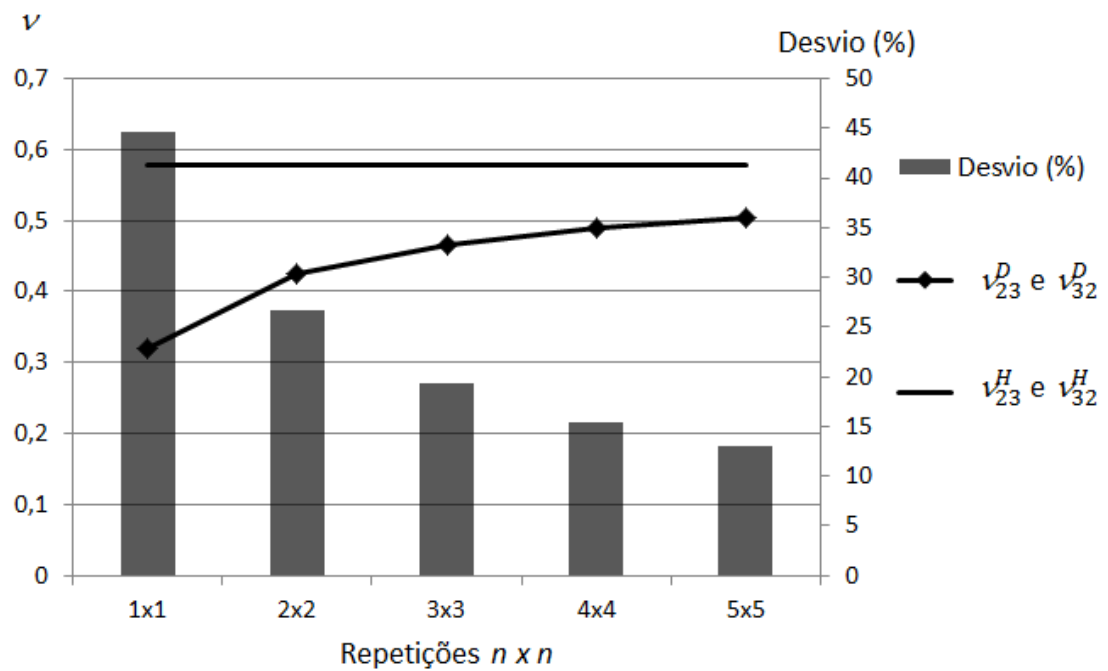


Figura 5.16 - Representação dos resultados obtidos através das condições de Dirichlet referentes à topologia ótima sujeita à carga **Biaxial**. As linhas nos gráficos referem-se aos valores dos coeficientes de Poisson, e as colunas ao desvio entre os coeficientes homogeneizados e os obtidos numericamente.

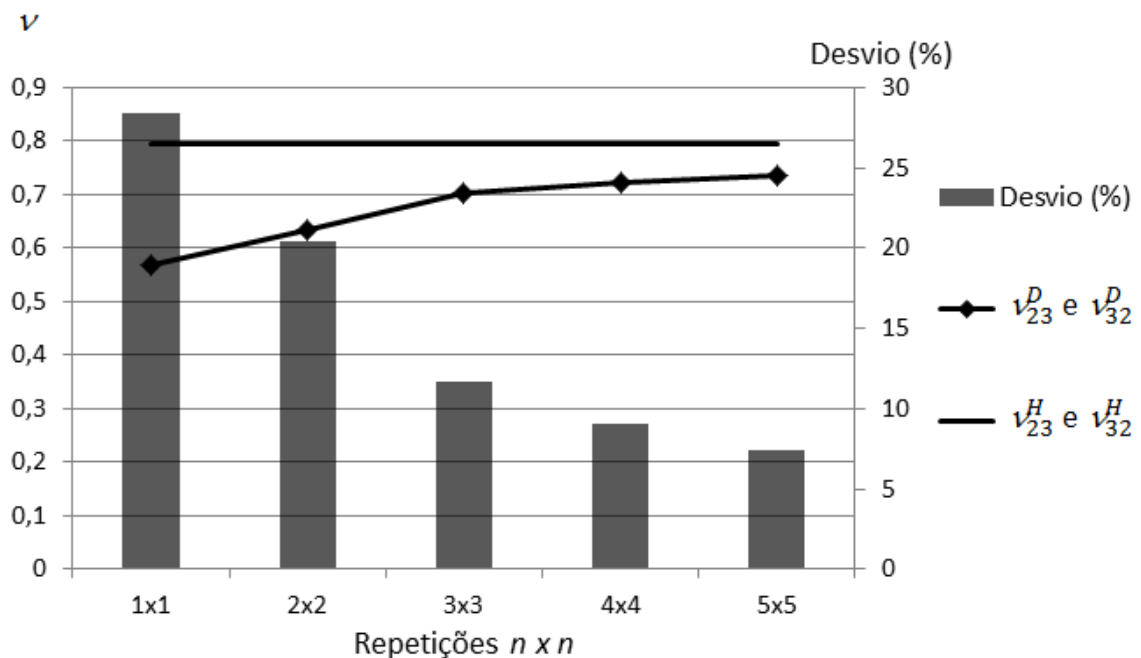


Figura 5.17 - Representação dos resultados obtidos através das condições de Dirichlet referentes à topologia ótima sujeita à carga **Corte**.

Resultados

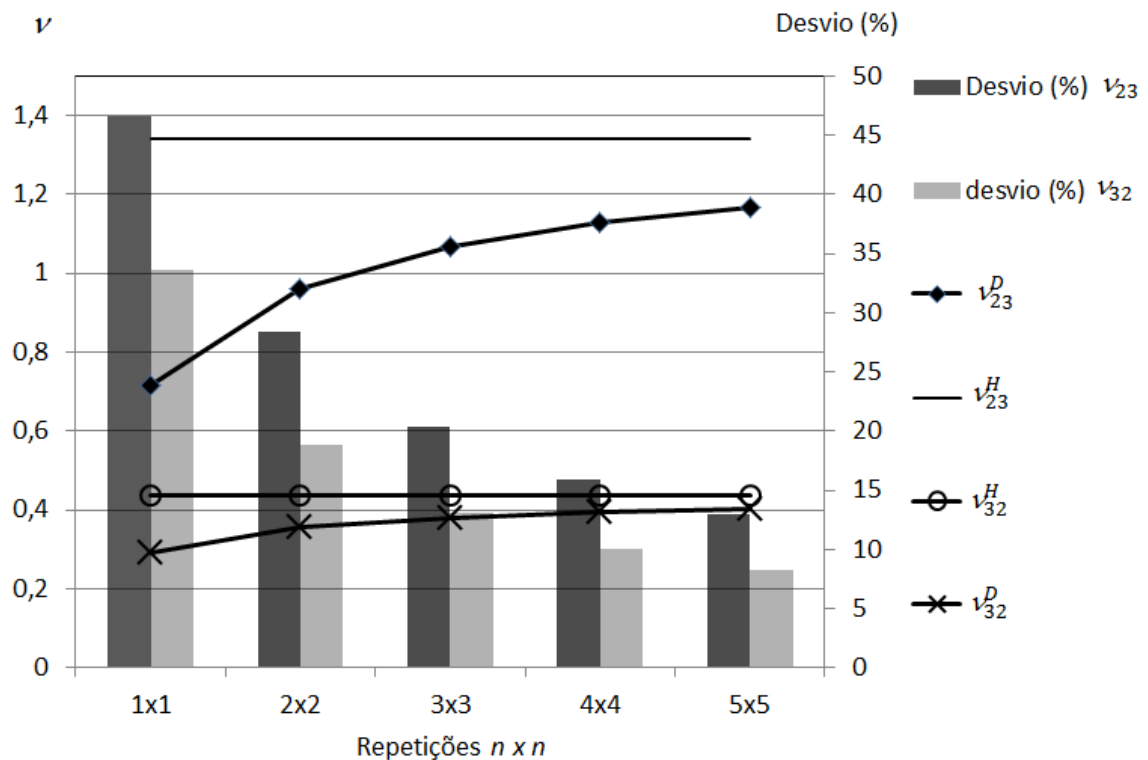


Figura 5.18 - Representação dos resultados obtidos através das condições de Dirichlet referentes à topologia ótima sujeita à carga **Uniaxial e corte**.

O coeficiente de Poisson ν_{23} apresenta um desvio superior em todas as análises em relação ao coeficiente ν_{32} . O primeiro apresenta um desvio de sensivelmente 46% para a análise da célula unitária, e para a repetição (5x5) o valor do desvio entre o coeficiente homogeneizado e o coeficiente obtido através das condições de Dirichlet é inferior a 15%. Quanto ao coeficiente ν_{32} , tem o desvio máximo inferior a 35% e converge para um valor entre 5% e 10%.

Para estas análises é possível perceber que o número de repetições não é suficiente para assegurar a convergência total entre estas propriedades. No entanto, o desvio entre as propriedades homogeneizadas e numéricas diminui ao longo do número de repetições, o que revela coerência com os resultados apresentados na bibliografia.

5.3.2 Ensaios alternativos

O estudo comparativo entre os coeficientes de Poisson homogeneizados e os obtidos através dos ensaios numéricos alternativos explicados na secção 4.3.2 são em seguida apresentados. O modo de apresentação é idêntico ao exposto na secção anterior, onde os coeficientes de Poisson ν_{23} e ν_{32} apresentam valores iguais, entre si, para as topologias ótimas sujeitas à carga **Biaxial** e **Corte**, enquanto que a microestrutura ótima sujeita à carga **Uniaxial e corte** possuem valores diferentes. A fórmula do desvio é quase idêntica, sendo dada por:

$$\text{Desvio [\%]} = \frac{|v_{ij}^* - v_{ij}^H|}{v_{ij}^H} \times 100 \quad (5.5)$$

Onde v_{ij}^* representa os valores dos coeficientes de Poisson obtidos através deste ensaio numérico. Nas figuras 5.19, 5.20 e 5.21 são apresentados então os resultados referentes a esta análise, para as topologias ótimas sujeitas aos casos de carga **Biaxial**, **Corte** e **Uniaxial e corte**, respetivamente. Observando o gráfico referente à microestrutura ótima sujeita à carga **Biaxial**, nota-se um desvio bastante reduzido, na ordem dos 0.8%, mas que vai aumentando com o decorrer das repetições tendo como valor 1.8% aproximadamente para (5×5). Apesar do comportamento estranho, em relação aos outros resultados apresentados, os valores do desvio entre as propriedades homogeneizadas e analíticas são bastante reduzidos, quase nulos. Quanto à análise da topologia ótima sujeita à tensão de **Corte**, esta apresenta um comportamento normal. Onde a análise à célula unitária apresenta um valor do erro na ordem dos 14%, e a análise à repetição da célula base (5×5) apresenta um valor inferior aos 4% entre os coeficientes de Poisson homogeneizados e analíticos. Por último apresenta-se o caso da microestrutura ótima sujeita ao estado de carga **Uniaxial e corte**. Para este estudo, o desvio associado ao coeficiente de Poisson ν_{23} apresenta um valor inferior ao desvio do coeficiente de Poisson ν_{32} , ao contrário do que se constatou nas condições de Dirichlet. O desvio entre o coeficiente de Poisson homogeneizado ν_{23}^H e o coeficiente de Poisson numérico ν_{23}^* é aproximadamente 40% quando analisada a célula unitária, e diminui regularmente para um valor muito próximo de 0%, para a repetição (5×5). De notar que para esta propriedade, a convergência dá-se a partir de valores superiores aos valores do coeficiente homogeneizado, sendo o único caso em que tal acontece.

Resultados

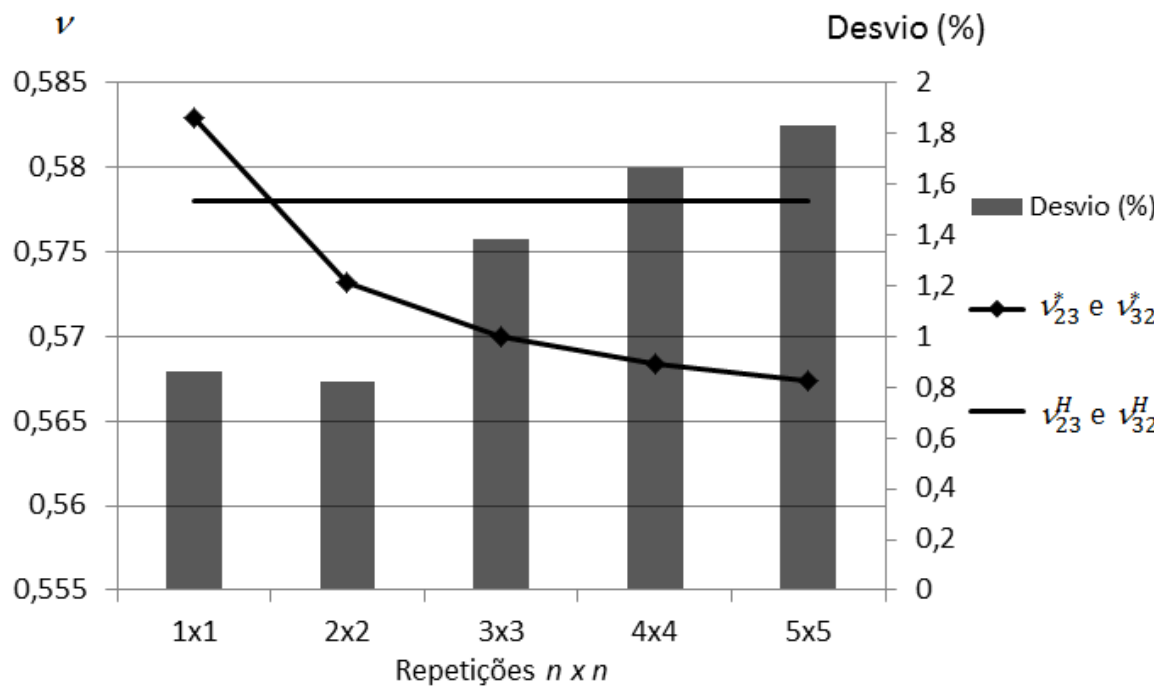


Figura 5.19 - Representação dos resultados obtidos através das condições alternativas, referentes à topologia ótima sujeita à carga **biaxial**. As linhas nos gráficos referem-se aos valores dos coeficientes de Poisson, e as colunas ao desvio entre os coeficientes homogeneizados e os obtidos numericamente.

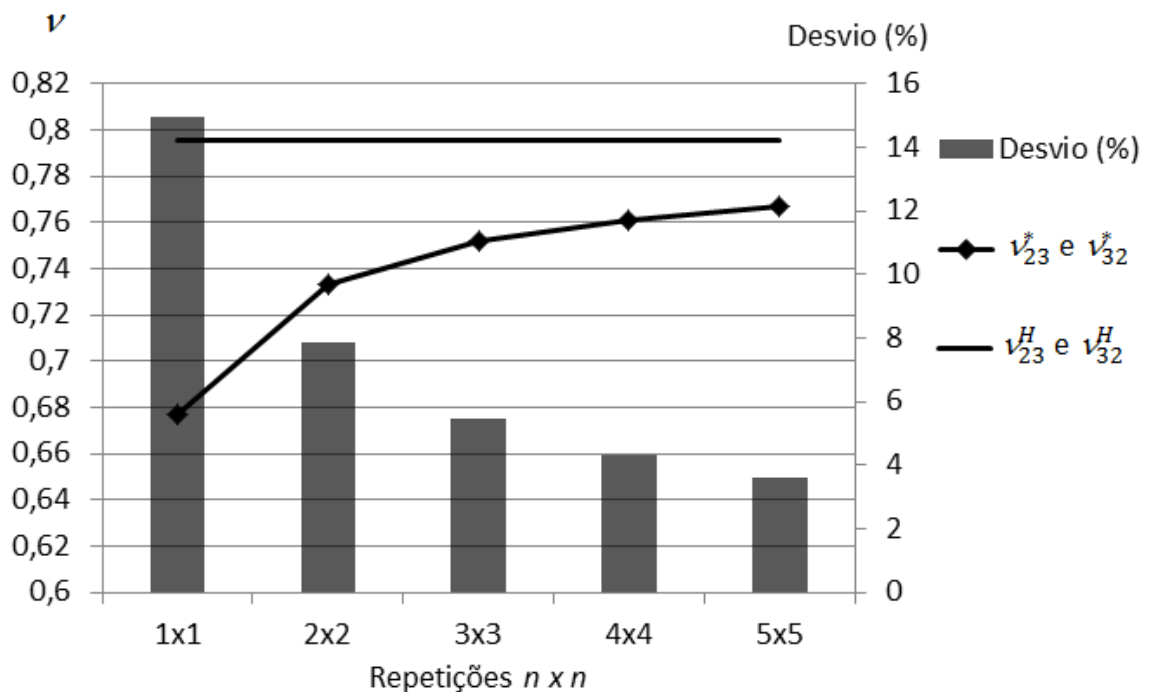


Figura 5.20 - Representação dos resultados obtidos através das condições alternativas, referentes à topologia ótima sujeita à carga **Corte**.

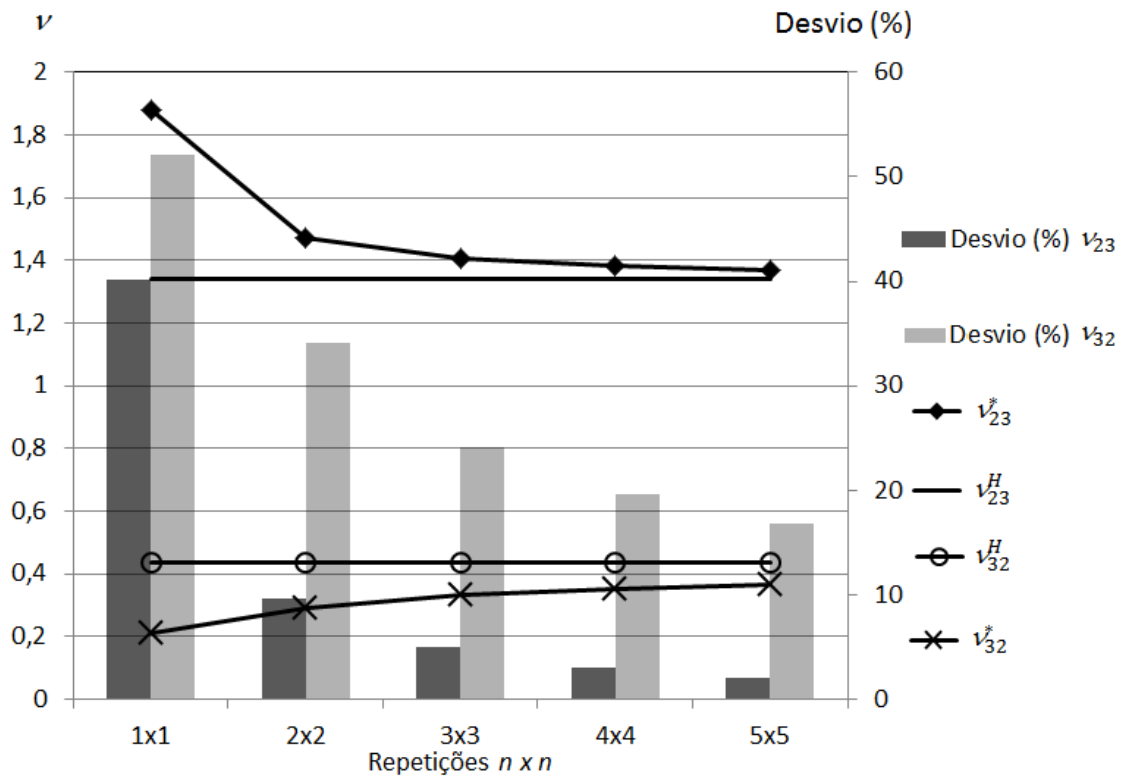


Figura 5.21 - Representação dos resultados obtidos através das condições alternativas, referentes à topologia ótima sujeita à carga **Uniaxial e Corte**.

O desvio entre ν_{32}^H e ν_{32}^* apresenta um valor bastante mais elevado, sensivelmente 50%, e decresce ao longo do número de repetições culminando num erro pouco inferior a 20%.

Uma vez mais, seria necessário um número mais elevado de repetições da célula unitária com o fim de garantir uma convergência definitiva. No entanto, observa-se que para estas condições de fronteira, o erro entre os valores dos Coeficientes de Poisson homogeneizados e numéricos, é geralmente bastante inferior ao obtido através das condições de Dirichlet.

6 Conclusões

Este trabalho pode ser dividido em três secções principais distintas, o estudo de fatores de influência na otimização, a otimização das propriedades elásticas, e o estudo dos efeitos de escala. Na primeira secção foram analisados fatores de influência na otimização. Este estudo é importante no seio da otimização topológica, visto que através da análise de sensibilidades utilizando o método do gradiente, um problema possui vários valores ótimos locais para os quais o algoritmo pode convergir, não alcançando o valor ótimo global. A utilização da estratégia de filtro de sensibilidades fixo é útil quando se trata de um problema complexo, em que não existe noção exata de qual será o resultado final, evitando o problema da formação de padrões de *checkerboard*. No entanto, é bastante complicado assegurar a convergência ótima global através desta estratégia visto que a utilização constante do filtro introduz um erro associado ao problema real, visto que as sensibilidades locais dos elementos dependem das sensibilidades dos elementos na sua vizinhança. A estratégia de filtro de sensibilidades variável assegura geralmente a convergência completa, porém existe sempre o risco de formação do padrão *checkerboard*. Quanto aos *designs* iniciais, não se pode concluir que existe uma inicialização que permita uma qualidade superior dos resultados para todos os casos, em que existe dependência do *design* inicial. Para o problema da minimização da energia de tensão com constrangimento de volume, a utilização de diferentes discretizações da malha de

Conclusões

elementos finitos permitiu obter microestruturas semelhantes, podendo concluir-se que existe independência da malha.

Relativamente ao estudo da otimização das propriedades elásticas, foram geradas várias microestruturas através de vários tipos de problemas formulados. A maximização das constantes elásticas individualmente e a soma de ambas as componentes longitudinais permitiu obter microestruturas semelhantes às obtidas através da minimização da *compliance*, o que representa um resultado coerente consoante o estado de carga aplicado e a componente elástica maximizada. A imposição de constrangimentos de simetria de material permitiu obter microestruturas com diferentes níveis de simetria, nomeadamente ortotrópica, cúbica e isotrópica. Esta última foi bastante complexa de obter tendo exigido várias formulações diferentes com vista a obter o resultado pretendido. Tal não foi possível, pelo que teve que ser adoptado o método da otimização para um quarto da célula, de modo a garantir a existência de simetria nos dois eixos. Relativamente à minimização do coeficiente de Poisson, foram encontradas poucas formulações na bibliografia, pelo que foram criados alguns problemas que apresentaram bons resultados, nomeadamente o problema de função multiobjetivo com minimização do coeficiente de Poisson e minimização da *compliance*, ou minimização da componente de corte do tensor da flexibilidade. A minimização do erro entre o tensor homogeneizado e o tensor alvo permitiu obter uma topologia bem definida já existente na bibliografia, como também permitiu obter topologias auxéticas originais. Por último procedeu-se à minimização do coeficiente de Poisson com constrangimentos de volume e de simetria isotrópica. Como seria de esperar, foi um processo também bastante complicado, desde encontrar o valor mínimo do módulo de compressibilidade, tolerâncias dos constrangimentos de desigualdade, *design* inicial entre outros. O resultado apresentado foi o melhor possível em variadas otimizações realizadas, contendo um histórico de otimização consistente, bem como o tensor elástico isotrópico, no entanto, dispõe de um *design* de material bastante irregular.

São várias as causas que se podem associar a estas dificuldades na otimização. O facto de serem utilizados elementos de baixa ordem (8 nós por elemento hexaedro), aproximando o problema através de funções lineares. O otimizador utilizado nesta dissertação é o MMA, o que pode registar algumas oscilações junto ao ótimo. A utilização do filtro de sensibilidades também introduz um erro, uma vez que este perturba o gradiente de sensibilidades.

Como trabalhos futuros, seria interessante a formulação destes problemas, principalmente na minimização do coeficiente de Poisson, mas com a utilização de

elementos finitos de ordem elevada (por exemplo de 20 nós por elemento hexaedro), em que se faz a aproximação ao problema real através de funções quadráticas, minimizando o erro associado. E com este, a utilização do filtro de sensibilidades pode ser dispensável. A utilização de um otimizador mais recente, nomeadamente o GMMMA (Generalized MMA) ou o GCMMA (Global Convergent MMA), pode permitir uma convergência mais eficaz do problema real.

Para os estudos dos efeitos de escala, a limitação do número de nós do *Ansys* limitou este trabalho, não só porque não permitiu a análise a um maior fator de escala, como também porque o estudo teve que ser realizado na malha ($1 \times 30 \times 30$). Para esta, a variedade de microestruturas aptas para o estudo dos efeitos de escala foi bastante reduzido, em comparação com as diferentes topologias obtidas na malha ($1 \times 40 \times 40$).

Quanto ao estudo em si, os resultados relativos à aplicação das condições de fronteira de Dirichlet são consistentes com os resultados já existentes na bibliografia, podendo afirmar-se que existe convergência entre os valores homogeneizados e numéricos. Quanto aos ensaios alternativos, estes apresentaram uns resultados bastante positivos, na medida em que o erro associado entre os coeficientes de Poisson foi bastante inferior ao valor do erro registado nos ensaios normalizados.

Como desenvolvimento futuro, seria interessante o estudo dos efeitos de escala do coeficiente de Poisson para uma maior diversidade de microestruturas, incluindo microestruturas auxéticas.

7 Bibliografia

- A**miano, D.A., 2015. *Análise e otimização de materiais compósitos de microestrutura periódica*. FCT-UNL.
- Andreassen, E., Lazarov, B.S. & Sigmund, O., 2014. Design of manufacturable 3D extremal elastic microstructure. *Mechanics of Materials*, 69(1), pp.1–10. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.09.018>.
- Ashby, M.F., 1991. Overview No. 92: Materials and shape. *Acta Metallurgica Et Materialia*, 39(6), pp.1025–1039.
- B**endsøe, M.P., 1989. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, 1(4), pp.193–202.
- Bendsøe, M.P. & Sigmund, O., 1999. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69(9-10), pp.635–654. Available at: <http://www.springerlink.com/index/A0X3MX3W4RKALQDV.pdf>
<http://www.springerlink.com/content/a0x3mx3w4rkalqdv/>
<http://link.springer.com/10.1007/s004190050248>.
- Bendsøe, M P, Sigmund, O., 2003. *Topology optimization theory, methods and applications*, Berlin, Heidelberg, New York.
- Bruns, T.E. & Tortorelli, D.A., 2001. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(26-27), pp.3443–3459.

- Caddock, B.D. & Evans, K.E., 1989. Microporous materials with negative Poisson's ratios. I. Microstructure and mechanical properties. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 22(12), pp.1877–1882.
- Cadman, J.E. et al., 2013. On design of multi-functional microstructural materials. *Journal of Materials Science*, 48(1), pp.51–66.
- Chadwick, P., Vianello, M. & Cowin, S.C., 2001. A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(11), pp.2471–2492.
- Challis, V.J., Roberts, A.P. & Wilkins, A.H., 2008. Design of three dimensional isotropic microstructures for maximized stiffness and conductivity. *International Journal of Solids and Structures*, 45(14-15), pp.4130–4146.
- Coelho, P., 2009. Modelos Hierárquicos para a análise e síntese de estruturas e materiais com aplicações à remodelação óssea, *Tese de Doutorado*. FCT-UNL.
- Coelho, P.G. et al., 2015. Scale-size effects analysis of optimal periodic material microstructures designed by the inverse homogenization method. *Computers & Structures*, pp.1–22. Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794915002746>.
- Coelho, P.G. & Cardoso, J.B., 2012. Apontamentos de Métodos Computacionais Em Engenharia Mecânica. In *Departamento de Eng. Mecânica e Industrial, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade Nova de Lisboa*. Lisboa, p. 171.
- Díaz, a. & Sigmund, O., 1995. Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural Optimization*, 10(1), pp.40–45.
- Evans, K., 1990. Tailoring the negative Poisson's ratio. *Chem. & Indust.*
- Evans, K.E. & Alderson, A., 2000. Auxetic materials: Functional materials and structures from lateral thinking! *Advanced Materials*, 12(9), pp.617–628.
- Feury, C. & Braibant, V., 1986. Structural optimization: A new dual method using mixed variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23(March 1985), pp.409–428.
- Fortes, A.D., Suard, E. & Knight, K.S., 2011. Negative Linear Compressibility and Massive Anisotropic Thermal Expansion in Methanol Monohydrate. *Science*,

331(6018), pp.742–746. Available at:
<http://www.sciencemag.org/cgi/doi/10.1126/science.1198640>.

Gibson; Ashby, M.F., 1988. *Cellular solids* Second.,

Grima, J.N. et al., 2012. Three-dimensional cellular structures with negative Poisson's ratio and negative compressibility properties. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 468(2146), pp.3121–3138.

Guedes, M. & Kikuchi, N., 1990. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods In applied Mechanics and Engineering*, 83, pp.143–198.

Guest, J.K. & Prevost, J.H., 2006. Optimizing multifunctional materials: Design of microstructures for maximized stiffness and fluid permeability. *International Journal of Solids and Structures*, 43(22-23), pp.7028–7047.

Guth, D.C., Luersen, M.A. & Muñoz-Rojas, P.A., 2015. Optimization of three-dimensional truss-like periodic materials considering isotropy constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 52(5), pp.889–901.

Guth, D.C., Luersen, M.A. & Muñoz-Rojas, P.A., 2012. Optimization of periodic truss materials including constitutive symmetry constraints. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 43(5), pp.447–456.

Hollister, S.J. & Lin, C.Y., 2007. Computational design of tissue engineering scaffolds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(31-32), pp.2991–2998.

Jones, R.M., 1999. Mechanics of composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, (2), p.519.

Kang, Heesuk; Hollister, S.J., 2007. Optimal design of 3D tissue engineering scaffolds to achieve tissue mechanical properties with constrained diffusivity. In *7th World Congress on Structural Multidisciplinary Optimization*.

Lakes, R.S., 1987. Foam Structures with a Negative Poisson ' s Ratio. *Science*, 235(4792), pp.1038–1040.

Li, W. et al., 2012. Negative linear compressibility of a metal-organic framework. *Journal of the American Chemical Society*, 134(29), pp.11940–11943.

Bibliografia

Liu, K. & Tovar, A., 2014. An efficient 3D topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 50(6), pp.1175–1196.

Petersson, J. & Sigmund, O., 1998. Slope constrained topology optimization. *International Journal for Numerical ...*, 41(January 1997), pp.1417–1434.

Prawoto, Y., 2012. Seeing auxetic materials from the mechanics point of view: A structural review on the negative Poisson's ratio. *Computational Materials Science*, 58, pp.140–153. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2012.02.012>.

Reis, R., 2016. *Análise de tensão em materiais compósitos de microestrutura periódica*. FCT-INL.

Sigmund, O., 2001. A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2), pp.120–127.

Sigmund, O., 1994. *Design of Material Structures using Topology Optimization*,

Sigmund, O., 2000. New class of extremal composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(2), pp.397–428.

Sigmund, O. & Petersson, J., 1998. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, 16(1), pp.68–75.

Sigmund, O. & Torquato, S., 1997. Design of Materials With Extreme Thermal Expansion Using a Three-Phase Topology. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(6), pp.1037–1067.

Svanberg, K., 1987. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2), pp.359–373.

Ti, Z., 2002. L 15– I 20, 2002. © 2002. *The International Journal of Fracture*, pp.15–20.

Weng, C.N., Wang, K.T. & Chen, T., 2008. Design of microstructures and structures with negative linear compressibility in certain directions. *Advanced Materials Research*, 33-37, pp.807–814. Available at: <http://www.scientific.net/AMR.33-37.807>.

- Wieding, J. et al., 2013. Finite element analysis on the biomechanical stability of open porous titanium scaffolds for large segmental bone defects under physiological load conditions. *Medical Engineering and Physics*, 35(4), pp.422–432. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.medengphy.2012.06.006>.
- Wilkins, Andy H; Challis, Vivien J; Roberts, A.P., 2007. Isotropic, Stiff, Conducting Structures Via Topology Optimization. In *7th World Congress on Structural Multidisciplinary Optimization*.
- Wu, S. et al., 2014. Biomimetic porous scaffolds for bone tissue engineering. *Materials Science and Engineering R: Reports*, 80(1), pp.1–36. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mser.2014.04.001>.
- Xie, Y.M. et al., 2014. Designing orthotropic materials for negative or zero compressibility. *International Journal of Solids and Structures*, 51(23-24), pp.4038–4051. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.07.024>.
- Xie, Y.M. & Steven, G.P., 1997. *Evolutionary Structural Optimization*, Available at: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4471-0985-3_2.
- Zhang, W. et al., 2007. Topology optimal design of material microstructures using strain energy-based method. *Chinese Journal of Aeronautics*, 20(4), pp.320–326.
- Zhou, M. & Rozvany, G.I.N., 1992. DCOC - An Optimality Criteria Method For Large Systems - Theory. *Structural Optimization*, 5(April), pp.12–25. Available at: <Go to ISI>://A1992KC45600002.
- Zohdi, T. & Wriggers, P., 2004. *An Introduction to Computational Micromechanics* Springer, ed., Berlin.